Biomeetria

5. praktikum

Loeme sisse andmestiku kalad:

```
load(url("http://www.ms.ut.ee/mart/biomeetria2012/kalamees.RData"))
```

Lühikeste tunnuste nimede kasutamiseks anna käsk

```
attach(kalad)
```

Andmestiku lühikirjeldus:
Soomes Tampere lähedal asuvast Laenelmavesi järvest püüti 159 kala. Püütud kalad on pärit 7 liigist.
Mõõdetud tunnuste kirjeldused:

Species on kodeeritud tunnus kalaliikidest:

1 - latikas	2 - siig	3 - särg
4 - linask	5 - tint	6 - haug
7 - ahven		

Weight on kala kaal grammides
Length3 on kala pikkus ninast saba tipuni sentimeetrites.
Height on maksimaalne kõrgus, mis antud protsendina *Length3*-st.
Width on maksimaalne paksus, mis on samuti
Sex on kala sugu: 0-emane; 1-isane

Regressioonanalüüs

Anna-Liisa tegi latikate elu kirjeldavat loodusfilmi. Peale veealuste kaadrite filmimist hakati tavainimese jaoks sobivaid selgitusi lisama. Telekanali esindaja, vana kalamees Kalamees soovis tungivalt, et ühe eriti uhke latika kaalu ka selgitavas tekstis mainitakse. Kuna filmitähest latikas oli juba ammu tont teab kuhu ujunud (või nahka pandud), tuli kala kaal kuidagi kaudsel viisil välja nuputada. Õnneks oli filmitud kaadrite pealt võimalik mõõta latika pikkust ja laiust. Anna-Liisa otsustaski kaalu prognoosida kas latika pikkuse või laiuse järgi (kumb iganes neist täpsema prognoosi annab), kasutades prognoosiva mudeli loomiseks Laenelmavesi järvest püütud latikate andmeid.

Mudeli loomine (latikate jaoks on tunnus *Species* väärtus 1):

```
> mudel=lm(Weight~Length3, data=kalad[Species==1,])
```

funktsioontunnus (sõltuv tunnus, *dependent variable*)

argumenttunnus (sõltumatu tunnus, *independent variable*)

```
> mudel

Call:
lm(formula = Weight ~ Length3, data = kalad[Species == 1, ])

Coefficients:
(Intercept)      Length3
   -1194.40        47.37
```

Kaalu prognoosiv mudel on

$$Kaal = -1194{,}4 + 47{,}37*Pikkus + \varepsilon$$

Seega 30 cm pikkuse latika kaaluks prognoosib mudel -1194,4+47,37*30 = 226,7g, ehk teisisõnu: 30cm pikkuste latikate keskmine kaal on 226,7g.

```
> summary(mudel)

Call:
lm(formula = Weight ~ Length3, data = kalad[Species == 1, ])

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-101.671  -29.643   -8.777   28.855  176.486

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -1194.395     89.815  -13.30 8.29e-15 ***
Length3        47.369      2.328   20.34  < 2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 `***' 0.001 `**' 0.01 `*' 0.05 `.' 0.1 ` ' 1

Residual standard error: 56.45 on 33 degrees of freedom
Multiple R-Squared: 0.9261,     Adjusted R-squared: 0.9239
F-statistic: 413.8 on 1 and 33 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Prognoosivead:
50% prognoosivigadest ε jääb vahemikku -29,6 ... +28,9

Testitakse, kas kala pikkuse muutudes ikka kala kaal ka muutub (kas regressioonmudelis pikkuse ees olev kordaja erineb nullist)

Parandatud determinatsioonikordaja R_{adj}^2=0,9239. Järeldus on sama mis R^2-kasutades: mudel prognoosib kaalu küllaltki täpselt.

Determinatsioonikordaja R^2=0,9261. Mudel prognoosib kaalu küllaltki täpselt.

Milliste pikkuste jaoks prognoose soovime

Prognoosime erinevate pikkustega latikate kaale:

```
> prognoos=predict(mudel, data.frame(Length3=c(20,50)))
> prognoos
> prognoos
        1         2
-247.0199 1174.0432
```

20 cm pika latika kaaluks prognoositi –247 g (Näide sellest, et väljapoole olemasolevate andmete piire üldiselt prognoosida ei tohiks)

50 cm pika latika kaaluks prognoositi 1174 g (päris pirakas)

Saadud tulemused võib esitada graafiliselt. Kõigepealt joonistame latikate pikkuste ja kaalude hajuvusgraafiku:

```
plot(Length3[Species==1], Weight[Species==1],
      main="Latika kaalu prognoosimine", xlab="Kala pikkus (cm)",
      ylab="Kala kaal (g)")
```

Lisame saadud joonisele regressioonsirge. Seda on võimalik teha kahel moel. Lihtsaim viis (mida aga ei saa kasutada keerukamate mudelite puhul) oleks käsuga `abline(mudel)`. Teine võimalus (ja ehk veidi paremini üldistatav ka keerukamatele juhtudele) on kasutada lines ja predict-käske:

```
lines(c(20,50), prognoos)
```

Saadud graafikule võime lisada ka usaldus- ja prognoosiintervalli. Selleks kasutame järgmiseid käske:

Prognoosiintervalli lisamine (leiame prognoosid latikatele pikkusega 30cm, 31cm, ..., 50cm ja kanname leitud prognoosid ning prognoosiintervallid joonisele):

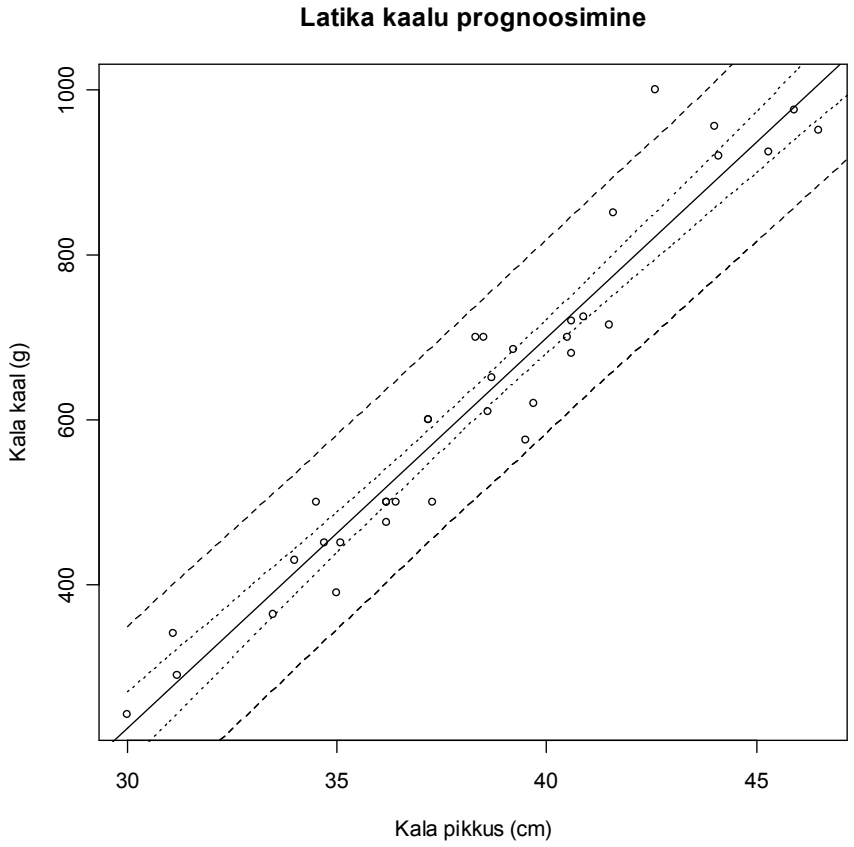
```
x=30:50
prognoos=predict(mudel, data.frame(Length3=x),
      interval= "prediction")
prognoos
```

Oleme saanud iga *x*-i väärtuse jaoks prognoosi kala kaalule (30cm pikkuste kalade keskmise kaalu, 31cm pikkuste kalade keskmise kaalu jne) koos prognoosiintervalliga. Kanname saadud prognoosiintervallid joonisele (alumised prognoosiintervallid on saadud tulemuste maatriksi 2. tulbas, ülemised 3. tulbas):

```
lines(x, prognoos[,2],lty=2)
lines(x, prognoos[,3],lty=2)
```

Usaldusintervalli lisamine:

```
prognoos=predict(mudel, data.frame(Length3=x),
      interval="confidence")
lines(x, prognoos[,2],lty=3)
lines(x, prognoos[,3],lty=3)
```



Konkreetse latika kaal, keda filmisime (pikkus 44cm) on seega suure tõenäosusega vahemikus 770g...1009g, kaalu prognoos 889,8 e. ligikaudu 900g ehk ligikaudu kilo ehk ligikaudu ... :

```
> predict(mudel,data.frame(Length3=44),interval="prediction")
          fit      lwr      upr
[1,] 889.8305 770.3174 1009.344
```

Eelduste kontroll

Paljude saadud tulemused on usaldusväärsed vaid siis, kui teatavad eeldused on täidetud. Eeldused, mida regressioonanalüüsi juures võivad oluliseks osutuda on järgmised:

1. Kas sirge ikka sobib kaalu kasvamist seletama?
2. Kas mudeli jäägid on (ligikaudu) normaaljaotusega (kui ei, siis on valed leitud prognoosiintervallid, väikese valimi korral võivad kaheldavaks osutuda ka hüpoteeside kontrolli osa ja usaldusintervallid)?
3. Kas jääkide hajuvus on ligikaudu konstantne (kui ei, siis ei pruugi prognoosiintervall olla õige; samuti saaks sellisel juhul mudeli parameetreid hinnata samu andmeid kasutades veidi täpsemalt...)?

Esimesele küsimusele – kas sirge sobib – saime vastuse juba joonistatud graafiku abil. Sageli kasutatakse ka mudeli jääkide ja prognoosiva tunnuse hajuvusgraafikut vaatamaks, kas seos tunnuste vahel on keerukam kui lineaarne (meetod väärib tundmaõppimist sest keerukamate mudelite korral osutub ta üsna kasulikuks):

```
plot(Length3[Species==1], resid(mudel))
```

Samalt graafikult võib kontrollida ka kolmanda eelduse paikapidavust. Mida teha, kui vaatlused ei paikne sirgel? Lihtsaid lahendusi on kaks:

1. teisenda kasutatud tunnuseid. Sageli võib aidata sõltuva tunnuse (või nii sõltuva- kui ka sõltumatu tunnuse) logaritmimine;

2. Teine võimalus on kaasata mudelisse argumenttunnuse kõrgemad astmed, st prognoosida y-tunnust kasutades polünoomi: $y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + ... + e$. Kõrgemaid astmeid (ruutliikme) saame mudelisse kaasata R´is järgmisel moel:

   ```
   mudel3=lm(Weight~Length3+I(Length3^2),data=kalad[Species==1,])
   summary(mudel3)
   ```

Pane kirja, millise mudeli said:

```
Weight = ....................................
```

Leiame kahe pikkuse jaoks kala kaalu prognoosid kasutades uut ja uhkemat mudelit:

```
predict(mudel3, data.frame(Length3=c(20,30)))
```

või, saadud regressioonseose kujutamine joonisel:

```
x=seq(8, 50, 0.1)
plot(Length3[Species==1],Weight[Species==1])
y=predict(mudel3, data.frame(Length3=x))
lines(x,y)
```

NB! Lisa ise joonisele usaldusintervall regressioonkõverale ja 95%-prognoosiintervall!

Antud juhul – kuna seos on tegelikult (peaaegu) lineaarne – ei muutu joonis pikkuse kõrgemate astmete lisamisel mudelisse kuigivõrd. Näeme ka vastavast testist, et ruutliikme ees olev kordaja võib üldkogumis osutuda ka nulliks – seega võiks kalade kaalude prognoosimisel kasutada ka mudelit, kus pikkuse ruutu sees poleks. Teistsuguste andmete puhul võib aga ruutliikme lisamine osutuda vägagi vajalikuks ja ruutliiget sisaldava mudeli prognooid võivad osutuda märkimisväärselt erinevaks lihtsa mudeli prognoosidest.

Jääkide normaaljaotust saab teadagi kontrollida tõenäosuspaberi (normaaljaotusgraafika) abil:

```
qqnorm(resid(mudel))
qqline(resid(mudel))
```

või veidi mugavamalt:

```
plot(mudel,2)
```

Tulemus on enam-vähem rahuldav (aga miks üks latikas nii eriline on? Ega tegemist pole sisestusveaga?). Kes ta üldse selline on? *Identify*-käsk võimaldab meil joonisel punkte hiirega klõpsida ja nende kohta informatsiooni saada (lõpetamiseks vajuta *Escape*'i):

```
identify(qqnorm(resid(mudel)))
```

Klikkige hiirega kahtlasel punktil. Arvuti peaks joonisele trükkima numbri 30, kahtlase vaatluse järjekorranumbri. Vaatame, kellega on tegemist:

```
kalad[Species==1,][30,]
```

Parima prognoosiva tunnuse otsimisest

Äkki saab aga kaalu kala kõrguse järgi paremini määrata?

```
> mudel2=lm(Weight~Height, data=kalad[Species==1,])
> summary(mudel2)

Call:
lm(formula = Weight ~ Height, data = kalad[Species == 1, ])

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-362.72 -136.45   19.91  124.00  431.55

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -1904.80     749.96  -2.540  0.01598 *
Height         63.94      18.96   3.373  0.00191 **
---
Signif. codes:  0 `***' 0.001 `**' 0.01 `*' 0.05 `.' 0.1 ` ' 1

Residual standard error: 179.1 on 33 degrees of freedom
Multiple R-Squared: 0.2563,     Adjusted R-squared: 0.2338
F-statistic: 11.37 on 1 and 33 DF,  p-value: 0.001915
```

Kohandatud determinatsioonikordaja on märgatavalt väiksem, R_{adj}^2=0,2338. Kala kõrgus on üsna kasutu kala kaalu prognoosimisel. **NB!** Mudelite prognoosivõime võrdlemisel eelista alati kohandatud determinatsioonikordajat!

Näeme mudeli viletsust ka sellest, et prognoosiintervall tuleb märksa laiem:

```
> predict(mudel2,data.frame(Height=40),interval="prediction")
         fit      lwr      upr
[1,] 652.725 282.6357 1022.814
```

Põhimõtteliselt on prognoosimiseks võimalik kasutada nii kala kõrgust kui pikkust:

```
mudel3=lm(Weight~Height+Length3, data=kalad[Species==1,])
summary(mudel3)
predict(mudel3, data.frame(Height=40, Length3=44),
      interval="prediction")
```

ja prognoosiks sobivate tunnuste leidmisel võib olla abi järgmistest käskudest:

```
cor(kalad[Species==1,3:8])
plot(kalad[Species==1,3:8])
```

Ülesanne
Proovi prognoosida ahvena kaalu kasutades ahvena (*Species*=7) pikkust (nähtud ahven oli 45cm pikk).

Loe sisse andmestik lapsed2:

```
andmed = read.csv2(
      "http://www.ms.ut.ee/mart/biomeetria2012/lapsed2.csv",
      header=TRUE)
```

Vaata andmeid
```
andmed[1:3,]
```

Antud andmestikus on järgmised tunnused:
vanus – lapse vanus mõõtmise tegemise hetkel (aastates)
kaal – lapse kaal (kg)
pikkus – lapse pikkus (cm).
sugu – lapse sugu

NB! Millise käsu peaksid andma, et saaksid hiljem selle andmestiku tunnuseid (lihtsalt) kasutada?

Meid huvitab, kas (ja kuidas) lapse vanemaks saades muutub lapse pikkus.

Esialgne mudel

```
m1=lm(pikkus~vanus)
summary(m1)
```

Milline näeb välja hinnatud mudel? Pane see kirja!
Kommenteeri tulemusi – kas vanuse abil saab pikkust prognoosida? Kui hästi?
Mis on hinnatud mudeli puhul viltu?

Unustame hetkeks oma kahtlused ja prognoosime oma mudelit kasutades 1,2 aasta vanuse lapse pikkust. Leiame ka 95%-usaldusintervalli 1,2 aastaste laste keskmisele pikkusele ja 95%-prognoosiintervalli 1,2 aastase lapse pikkusele:

```
> predict(m1, data.frame(vanus=1.2))
[1] 78.55209
> predict(m1, data.frame(vanus=1.2), interval="confidence")
         fit      lwr      upr
[1,] 78.55209 78.50859 78.59559
> predict(m1, data.frame(vanus=1.2), interval="prediction")
         fit      lwr     upr
[1,] 78.55209 71.60648 85.4977
```

Joonistame vanuse-pikkuse hajuvusgraafiku ning lisame gaafikule meie poolt leitud regressioonisirge:

```
plot(vanus, pikkus, xlab="Vanus (aastates)", ylab="Pikkus (cm)")
x=seq(0,2.2,0.01)
y=predict(m1, data.frame(vanus=x))
lines(x,y, col="red", lwd=2)
```

Mida teevad ülaltoodud programmi kolm viimast rida? Mida loed välja joonistatud graafikult?
Milliseid probleeme näed, kuidas võiks esinenud probleeme lahendada?

Vaatame ka teist regressioonanalüüsi eeldust – nõuet, et uuritav tunnus peab olema normaaljaotusega juhuslik suurus:

```
qqnorm(residuals(m1)); qqline(residuals(m1))
```

või vaatame lihtsalt jääkide histogrammi:

```
hist(residuals(m1))
```

Milline on otsus? Kuidas saaks mudelit parandada?