Sissejuhatus

Mis on biomeetria?

Kreeka keeles tähendab *bios* elu ja *metron* mõõtmist, seega on biomeetria elu mõõtmine. Biomeetria käsitleb matemaatika, statistika ja arvutustehnika rakendamist bioloogiliste probleemide lahendamiseks. Vahel kasutatakse ka termineid biostatistika (kui soovitakse esile tõsta statistikameetodite kasutamist) või bioinformaatika (kui tahetakse rõhutada arvutite ja arvutiteaduste osa). Käesolev kursus, olles kokku pandud statistiku poolt, kannab paratamatult oma looja jälge. Sestap on ta suuresti vaadeldav kui sissejuhatus biostatistikasse. Kitsamas tähenduses ongi biomeetria eelkõige statistiliste meetodite rakendamine bioloogiliste süsteemide uurimiseks.

Katkend Rahvusvahelise Biomeetriaseltsi koduleheküljelt (www.tibs.org):

The terms "Biometrics" and "Biometry" have been used since early in the 20th century to refer to the field of development of statistical and mathematical methods applicable to data analysis problems in the biological sciences. Statistical methods for the analysis of data from agricultural field experiments to compare the yields of different varieties of wheat, for the analysis of data from human clinical trials evaluating the relative effectiveness of competing therapies for disease, or for the analysis of data from environmental studies on the effects of air or water pollution on the appearance of human disease in a region or country are all examples of problems that would fall under the umbrella of "Biometrics".

Peatükk 1

Andmetest

Siin peatükis näeme, kui keerulise kõlaga sõnu saab kasutada andmetest rääkimisel; vaatame, kuidas algandmeid üles kirjutada ja kuuleme, milliseid silte võib mõõtmistulemustele külge kleepida

ehk

Andmemaatriksist, tunnuste tüüpidest ja kasutatavast tähistusest, väärtuste kodeerimisest ja puuduvatest väärtustest.

Selleks, et saaksime midagi objektiivset väita meid huvitava nähtuse, protsessi või objekti kohta on vaja vaatlus- või katsetulemusi. Enamasti pakub meile rohkem huvi see, milliseid järeldusi ja üldistusi me nende mõõtmistulemuste põhjal teha saame, kui üks või teine konkreetne mõõtmistulemus ise. Sestap on kerge unustada algmaterjal ja pürgida kohe kõrgustesse ja keerukate analüüside risträgastikku. Paraku ei seisa ükski maja kindlalt, kui vundament on hooletult ehitatud. Käesolevas peatükis vaatleme, millist terminoloogiat saab kasutada algandmetest rääkides ja sedagi, kuidas algandmeid nii kirja panna, et algandmetel tuginevad analüüsid hiljem ka kriitikatuultes püsima jääksid.

1.1 Objekt ja tunnus

Paljud statistikaga seotud arusaamatused on välditavad, kui inimesed saaksid täpselt aru, mida või keda nad uurivad (või keda on uuritud artiklis, mida parasjagu loetakse).

Definitsioon 1.1 ***Objekt*** *on uurimisalune ühik, üksikindiviid.*

Objektideks võivad näiteks olla linnupojad või pesakonnad; puud, metsatukad või punktid metsas; põdrad või ristamiskatse tagajärjel sündivad olevused.

Vahel on ka samade andmete puhul olemas mitu erinevat võimalust valida uurimisobjekti. Näiteks vaatame situatsiooni, kus on vaadeldud kahes pesas koorunud linnulapsi — ühes pesas koorus 9, teises 1 linnulast. Valides uurimisobjektiks pesakonna (kurna), saame tunnuse "*pesakonna suurus*" keskmiseks 5 (keskmine pesakonna suurus on 5); valides uurimisobjektiks aga linnulapse, saame tunnuse "*pesakonna suurus*" keskmiseks 8,2 (linnulaste keskmine päritolupesakonna suurus on 8,2). Vaata ka tabelit 1.1.

Tabel 1.1: Samad andmed - aga uurimisobjekt on erinev

Objekt - linnulaps

Pesakonna nr	Pesakonna suurus
1	9
1	9
1	9
1	9
1	9
1	9
1	9
1	9
1	9
2	1

Keskmine pesakonna suurus: 8,2

Objekt - pesakond

Pesakonna nr	Pesakonna suurus
1	9
2	1

Keskmine pesakonna suurus: 5

Näiteks metsa uurides võivad uurimisobjektideks olla puud või punktid metsas (võrdle: "80% vaadeldud metsapuudest olid pajud" vs "35% vaadeldud metsa-aladest olid kaetud pajudega"); taimede produktiivsuse uurimisel võib objektideks valida näiteks kas taime päevased või nädalased juurdekasvud (päeva või nädala jooksul lisanduv biomass), kusjuures uuritava tunnuse stabiilsus võib märgatavalt sõltuda meie valikust (nädala jooksul lisanduvad biomassid on sarnased; ühe päeva jooksul lisanduv biomass aga on üsna varieeruv suurus); jne.

Definitsioon 1.2 ***Tunnus*** *on objekti iseloomustav näitaja, mida põhimõtteliselt on võimalik mõõta või vaadelda.*

Hiiri uurides võivad tunnusteks olla karvavärv, kaal, sabapikkus, liik ja vanus; taimi uurides võivad tunnusteks osutuda kasvukoht, pikkus, lehtede arv, biomass, liik jne.

1.1.1 Tähistustest

Tunnuste nimede kirjutamisel kasutame edaspidi suuri tähti, näiteks $VANUS$, $SABAPIKKUS$ või $LIIK$. Vahel võime kasutada ka lühendeid, näiteks tunnuse "hiire poolt aasta jooksul läbinäritud raamatulehekülgede arv" võime tähistada sümboliga X (pane tähele - kasutame ikkagi suurt tähte X). Konkreetsete mõõdetud väärtuste tähistamiseks kasutame aga väikeseid tähti. Näiteks tunnuse X väärtus ühe konkreetse hiire puhul on tähistatud sümboliga x. Kui soovime täpsustada, millisel konkreetsel objektil vastav mõõtmine on aset leidnud, kasutame objekti numbrit alaindeksis: x_3 on tunnuse X väärtus 3. objektil (näiteks 3. hiire poolt rikutud lehekülgede arv).

Suurte tähtedega võime tähistada ka tulevasi mõõtmistulemusi, mille väärtus arutelu hetkeks pole selgunud. Näiteks planeerides järgmisel aastal aset leidvat uuringut saab rääkida 3. hiire mõõtmistulemusest kui suurusest X_3 (mis võib osutuda milleks iganes), peale uuringu toimumist ja andmete kogumist aga juba kui mõõtmistulemusest x_3 (mis on üks konkreetne ja teadaolev number).

1.2 Andmemaatriks

Arvuti jaoks andmete mõistetavaks tegemisel tuleb algandmed sisestada arvutisse kindlal kujul. Enamik statistikaprogramme soovib, et andmed oleksid sisestatud nn. objekt-tunnus maatriksina, st. sellise tabelina, kus iga veerg kujutab ühte tunnust ja iga rida ühte objekti.

Näide 1.1 *Käidi kümnel põllul ja koguti andmeid mullatüübi, mulla niiskuse ja viljakuse kohta. Saadud andmemaatriks on esitatud tabelis 1.2.*

Kaks võimalikku objekt-tunnus maatriksit on esinenud juba ka tabelis 1.1.

Tähtis on meeles pidada, et ühe (uurimis)objekti kohta tohib objekt-tunnus maatriksis olla vaid üksainus rida.

Kui andmed pole statistikaprogrammi sisestatud objekt-tunnus maatriksina, siis võib karta, et varem või hiljem leiab aset inimlik eksimus ning

Tabel 1.2: Objekt-tunnus maatriks

Põld	Mullatüüp	niiskus	suvinisu viljakus (kg/ha)
1	savimuld	niiske	3624
2	liivsavimuld	paras	4782
3	savimuld	niiske	4274
4	liivmuld	kuiv	3927
5	savimuld	paras	4630
6	liivmuld	paras	4920
7	savimuld	niiske	4260
8	savimuld	paras	4935
9	liivsavimuld	paras	5035
10	liivmuld	kuiv	4500

analüüsi tegev inimene interpreteerib arvuti poolt väljastatavaid tulemusi valesti.

Märkus: vahel kasutatakse ka andmemaatrikseid, kus ühe objekti kohta on kirjas mitu rida (nn kordusmõõtmiseid sisaldavad andmestikud). Selliste andmemaatriksite analüüs nõuab eriliste statistiliste meetodite kasutamist (kordusmõõtmiste analüüs, *repeated measures analysis*, ...) ja isegi pealtnäha lihtsatele küsimustele vastamine (milline on keskmine?) võib õige vastuse leidmine osutuda vägagi keeruliseks ülesandeks. Sellisel kujul esitatud andmete analüüs nõuab suuri statistika-alaseid teadmiseid ja pole enamasti algajale jõukohane.

1.3 Tunnuste tüübid

Võimalikke tunnuseid, mille vastu uurijad võivad huvi tunda, on sadu ja tuhandeid. Tunnuse uurimiseks sobivat metoodikat pole tarvis iga tunnuse jaoks uuesti leiutada – on ju võimalik leida keskmist nii hinnetele, saagikusele kui pesakonna suurusele. Kõigi mainitud tunnuste korral sobib keskmise arvutamiseks sama arvutuseeskiri.

Samas pole võimalik leida mullatüüpide keskmist – sellisel näitajal lihtsalt puuduks tähendus.

Kas oleks võimalik jagada tunnuseid selliselt, et ühte gruppi sattunud tunnused (sama tüüpi tunnused) on analüüsitavad kasutades sarnaseid statistikameetodeid? Selgub, et tunnuste taoline jagamine on täiesti võimalik.

Definitsioon 1.3 ***Pideva tunnuse*** *võimalike väärtuste arv on lõpmatu ja iga kahe võimaliku pideva tunnuse väärtuse vahele mahub alati veel üks võimalik pideva tunnuse väärtus.*

Pidevad tunnused on näiteks taime pikkus, looma kaal, temperatuur, fosfaatide kontsentratsioon vees, saagikus, ... Oleks soovitav, et kõik pideva tunnuse väärtused oleksid mõõdetud sama täpsusega (kõik pikkused mõõdetud millimeetri täpsuseni, kõik kaalumistulemused kirja pandud kg täpsusega jne). Igal juhul tuleb aga jälgida, et sama tunnuse kõik väärtused oleksid kirja pandud samades ühikutes (näiteks kilogrammides). Kui ühe elevandi kaaluna läheb kirja number 5300 (kg) ja teise elevandi kaaluks tuleb 4,9 (tonni), siis vaadeldud elevantide keskmiseks kaaluks annaks arvuti 2602,45, millisel numbril muidugi puudub igasugune sisu.

Definitsioon 1.4 ***Diskreetse tunnuse*** *väärtused saavad olla vaid täisarvulised. Peaaegu alati on diskreetse tunnuse väärtused tekkinud millegi loendamisel.*

Diskreetsed tunnused on näiteks pesakonna suurus, terade arv viljapeas, liikide arv ruutmeetril, looma poolt elu jooksul sünnitatud laste arv, ...

Definitsioon 1.5 ***Järjestustunnus*** *on tunnus, mille kõik võimalikud väärtused on järjestatavad.*

Järjestustunnused on näiteks eksperdi hinnang mullaniiskusele (väga kuiv - kuiv - paras - niiske - liigniiske); eksperdi hinnang looduskooslusele (riikliku kaitse alla võtta/ kohaliku kaitse alla võtta/ jätta juhuse hooleks/ buldooseritega hävitada); jälgija hinnang looma agressiivsusele (õel/ kurjavõitu/ normaalne/ rahumeelne/ tuim); aga samuti näiteks haridus, mõõdetuna skaalal algharidus - keskharidus - kõrgharidus - doktorikraad; jne.

Järjestustunnused tekivad sageli subjektiivsete hinnangute andmisel. Hinnangu andmise kriteeriumid võivad hindajati tugevalt erineda ning see võib paratamatult raskendada ka tulemuste hilisemat interpreteerimist. Seetõttu oleks tungivalt soovitav, et kõik hindajad ja ka analüüsi tulemuste hilisemad kasutajad mõistaksid võimalikult ühtemoodi seda, millal mulda on näiteks peetud "väga kuivaks" või kuna peeti kutsut õelaks.

Definitsioon 1.6 ***Nominaalne tunnus*** *on tunnus, mille väärtused pole sisuliselt järjestatavad.*

Nominaalsed tunnused on näiteks sugu, kasvukoht, liik, karvavärvus, lemmikroog, ...

Juhul, kui (nominaalsel) tunnusel on vaid kaks võimalikku väärtust, näiteks nagu tunnusel *SUGU*, siis kutsutakse vastavat tunnust ka **binaarseks** või **dihhotoomseks** tunnuseks.

Pidevaid ja diskreetseid tunnuseid kutsutakse vahel ka arvulisteks (kvantitatiivseteks) tunnusteks ja järjestus- ning nominaalseid tunnuseid kutsutakse mittearvulisteks ehk kvalitatiivseteks tunnusteks.

Näide 1.2 *Igal uuringusse kaasatud liblikal paluti ühe päeva jooksul muneda nii palju mune kui ta jaksab. Liblikat ja tema poolt munetud munasid uuriti põhjalikult. Kogutud andmed on esitatud tabelis 1.3. Märkus: toodud andmed on illustratiivsed ja ei baseeru tegelikel mõõtmistulemustel.*

Tunnused A ja C on pidevad, B on diskreetne, D on järjestustunnus (kasutatud kodeering: 1-väga räbaldunud; 2-kulunud; 3-peaaegu uus; 4-veatu), E on nominaalne (kasutatud kodeering: 1-rohetäpik; 2-suur-pärlmuttertäpik; 3-väike-pärlmuttertäpik).

Tabel 1.3: Liblikad

A	B	C	D	E
liblika suurus	munade arv	munetud munade keskmine kaal	liblika ilu	liik
11	20	1,3	2	1
10	34	1,8	3	1
12	67	0,9	4	2
7	10	0,7	2	3
12	0	1,0	1	2

1.4 Tunnuste kodeerimine, puuduvad väärtused

Tunnuse väärtuste sisestamisel arvutisse on sageli mõistlik üks või teine (enamasti pikk) väärtus asendada lühendi ehk koodiga. Näiteks tunnuse *PÜÜGIKOHT* väärtuste sisestamisel võime väärtuse "Elva-Vitipalu maastikukaitseala" asemel sisestada numbri "1" jne. Järjestustunnuse puhul on tunnuse väärtuste kodeerimine numbrite abil enamasti tungivalt soovitav. Sealjuures tuleks jälgida, et koodid säilitaksid väärtuste sisulise järjestuse. Seega ei tohi kasutada kodeeringut:

```
1 - hea
2 - paha
3 - ei oska öelda
```

küll aga sobivad kodeeringud

```
1 - hea             1 - paha             1 - hea
2 - ei oska öelda   2 - ei oska öelda    0 - ei oska öelda
3 - paha            3 - hea             -1 - paha
```

Iga veidigi suurema uuringu paratamatuks kaaslaseks on puuduvad andmed. Kas keeldub mõni talunik vastamast mõnele küsimusele, unustas doktorant katselapil ettenähtud ajal mõõtmisi tegemas käia või lasi katses kasutatud valge hiir lihtsalt jalga — tegijal juhtub nii mõndagi. Puuduvad andmed võivad analüüsi käigus palju peavalu põhjustada. Sellegi poolest tasub meeles pidada, et puuduvate andmete lihtsalt "äraunustamine" pole enamasti lahendus ja tekitab tavaliselt rohkem probleeme kui lahendab. Sestap on tungivalt soovitav algandmete sisestamisel sisestada ka need kirjed/objektid, kelle kohta andmed (osaliselt) puuduvad. **Puuduvad väärtused peavad andmestikus olema tähistatud nii, nagu ei tähistata andmestikus midagi muud.** Eriti kergesti võivad puuduva väärtusega segi minna näiteks tegelikud mõõdetud väärtused "0" või "vaadeldud omadust ei esinenud".

Näiteks parasiit A olemasolu mõõtev tunnus võiks olla kodeeritud järgmiselt: "1" – parasiit esines; "0" – parasiiti polnud; "." – informatsioon puudub (puuduv väärtus).

1.5 Ülesanded

1. Uuringu käigus koguti andmeid 15 jahimeeste poolt lastud põdra kohta. Kogutud andmed on esitatud tabelis 1.4. Milliseid tunnuseid mõõdeti? Mis tüüpi tunnustega on tegemist? Milline näeks välja objekt-tunnus maatriks antud andmete korral?

2. Loomaembrüodel mõõdeti järgmiste tunnuste väärtused:

   - VANUS1 (vanus päevades)
   - VANUS2 (rakkude pooldumiskordade arv)
   - EMASLOOMA EKSPOSITSIOON ALKOHOLILE (ei/ natuke/ ohtralt)
   - GEENI X MUTATSIOON (esines/ ei esinenud)

Tabel 1.4: Ülesanne 1 - Kolmes metsas lastud põtrade vanused

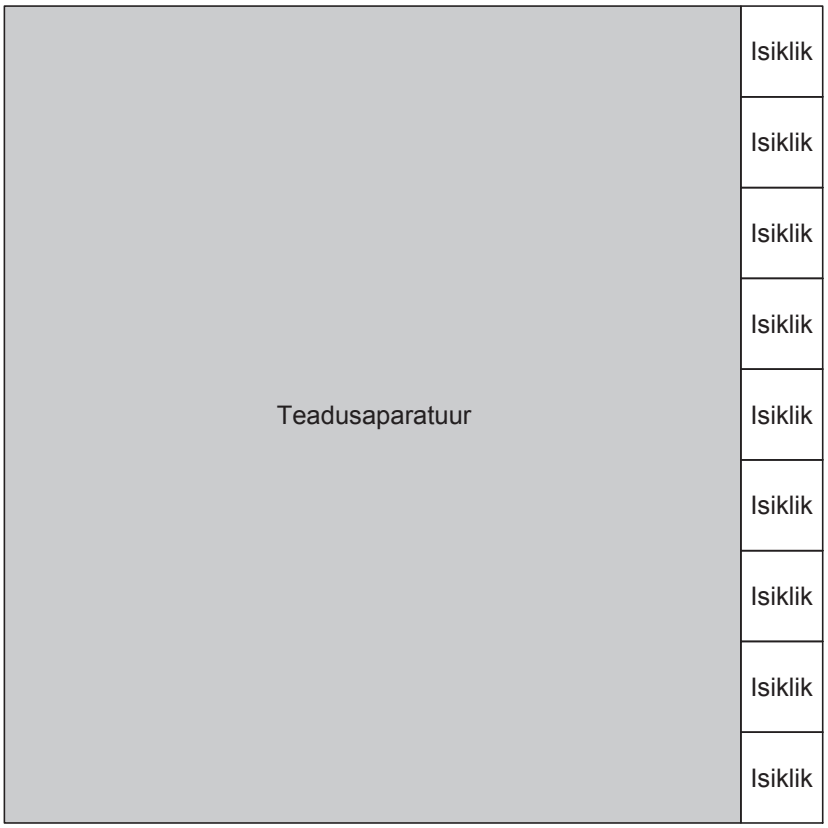
	laskmiskoht		
aasta	Alutaguse	Vändra kant	Kapa-Kohila
2004	10a, 12a	3a	
2005	10a	3a, 5a	7a, 15a, 10a
2006	10a, 11a	4a, 15a	4a, 8a

- KASVUKESKONNA Ph

Mis tüüpi tunnustega on tegemist?

3. Ajakirjanduses ilmusid väited, et Antarktikasse rajatud Eesti uurimisjaama maksumaksja kulul saadetud asjadest on 90% loodusuurijate isiklikud asjad. Loodusuurijad vaidlesid vastu, et isiklikud asjad moodustasid kõnealusest saadetisest vaid 10%. Milles on asi? Kellel on õigus? Vaata ka joonist 1.1!

Joonis 1.1: Saadetis Antarktikasse



Peatükk 2

Kirjeldav statistika

Siin peatükis kuuleme, kuidas saaks lühidalt ja kokkuvõtlikult kirjeldada äraütlemata suurt lasu kokkukogutud andmeid
ehk
ühe tunnuse empiirilise jaotuse kirjeldamine.

2.1 Sagedused ja osakaalud

Kõige lihtsam ja ülevaatlikum viis andmeid kirjeldada, eriti kui tegemist on nominaalse, järjestus- või väheste võimalike väärtustega diskreetse tunnusega on iga võimaliku väärtuse kohta öelda, mitu korda me sellist väärtust oleme näinud (raporteerida iga väärtuse esinemissagedust). Enamasti esitatakse selline kokkuvõtlik informatsioon kas sagedustabelina, tulp- või ringdiagrammina. Vahel on otstarbekam välja tuua erinevate väärtuste osakaalud — näiteks kui suur osa kõigist põldudest asuvad liivastel muldadel, kui suur osa savimuldadel jne. Osakaalusid võib vajaduse korral esitada ka protsentides.

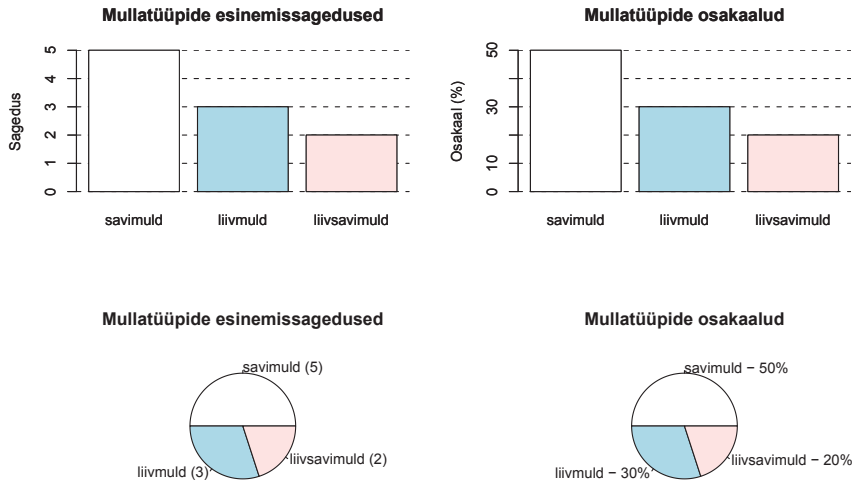
Alljärgnevalt vaatleme näites 1.1 toodud tunnuse *MULLATÜÜP* sagedus- ja jaotustabelit ning nende tabelite põhjal joonistatud tulp- ja ringdiagramme.

Nominaalsete tunnuste väärtuste kirjeldamisel polegi suurt midagi muud võimalik teha, kui esitada tunnuse sagedustabel (või esitada erinevate väärtuste osakaalud). Vahel tuuakse eraldi välja ka tunnuse mood — kõige sagedamini esinenud tunnuse väärtus. Mullatüüpe iseloomustavas näites oleks tunnuse *MULLATÜÜP* moodiks savimuld - savimuldasid esines vaadeldud põldude seas kõige rohkem.

Pideva tunnuse väärtuste iseloomustamisel pole ülaltoodud viisil koos-

Tabel 2.1: Tunnuse *MULLATÜÜP* võimalike väärtuste sagedused ja osakaalud

Mullatüüp	Sagedus	Osakaal	Osakaal (%)
savimuld	5	0,5	50%
liivmuld	3	0,3	30%
liivsavimuld	2	0,2	20%



tatud sagedustabelist aga eriti abi — tabel tuleks liiga pikk ning poleks märkimisväärselt targem kui lihtsalt kõigi tunnuse vaadeldud väärtuste esitamine. Koostamaks mõistlikku sagedustabelit pideva tunnuse tarvis, jagatakse pideva tunnuse väärtused eelnevalt samapikkadeks vahemikeks (Näiteks [0..10),[10..20), jne). Seejärel vaadatakse, kui sageli pideva tunnuse väärtus sattub ühte või teise vaatlusalusesse vahemikku. Mitut vahemikku kasutada? Kindlat reeglit siin pole. Üks soovitus võiks olla järgmine: leia ruutjuur vaatluste arvust. Vali vahemike arvuks mõni täisarv, mis oleks ligikaudu samasuur kui leitud ruutjuur. Näiteks, kui tehtud on 10 vaatlust, siis võiks pideva tunnuse väärtused jagada 3 või 4 vahemikku. Antud reegel on vaid soovitusliku väärtusega, vajadusel võib kasutada ka rohkemaid või vähemaid

vahemikke.

Pideva tunnuse sagedustabeli illustreerimisel kasutatavat joonist kutsutakse histogrammiks. Kui tulpdiagramm oli antud andmete (vaatlustulemuste) korral üheselt määratud, siis samade andmete põhjal võime saada üsnagi erineva kujuga histogramme. Muutes sagedustabeli koostamisel kasutatud vahemikke muutub enamasti ka sagedustabel ja tema põhjal joonistatud histogrammi kuju.

Näide 2.1 *Näites 1.1 on antud suvenisu viljakused erinevatel põldudel. Suvenisu viljakus on pidev tunnus, tema väärtuste jaoks sagedustabeli koostamisel võiksime jagada viljakusandmed näiteks nelja vahemikku. Saadud sagedustabel on antud tabelis 2.2. Antud andmete illustreeriva histogrammi allosas on ära märgitud väikeste joonekestega ka tegelikud vaatlusandmed. Kasutatud vahemike korrektsel kirjeldamisel võib kasutada ka nurk- ja ümarsulge – piiripeale jääv vaatlus pannakse siis kirja sinna vahemikku, kus vastav väärtus piirneb nurksuluga. Seega mõõtmistulemus* 4500 *läheb kirja vahemikku* $[4500 \ldots 5000)$ *ja mitte vahemikku* $[4000 \ldots 4500)$.

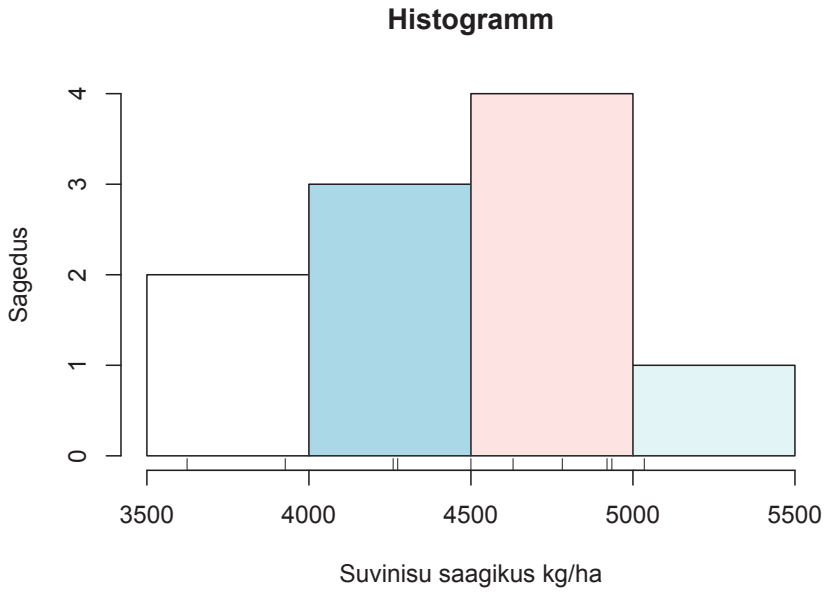
Tabel 2.2: Tunnuse *VILJAKUS* sagedustabel ja osakaalud

Viljakus	Sagedus	Osakaal	Osakaal (%)
$[3500 \ldots 4000)$	2	0,2	20%
$[4000 \ldots 4500)$	3	0,3	30%
$[4500 \ldots 5000)$	4	0,4	40%
$[5000 \ldots 5500)$	1	0,1	10%

NB! On tungivalt soovitav, et kõik kasutatud vahemikud oleksid võrdse pikkusega! Sestap tuleks võimaluse korral vältida ka "avatud" vahemikke, nagu näiteks "suurem kui 50 ha". Kasutades muutuva pikkusega vahemikke võib statistika tarbijas tekitada just sellise pettekujutelma nagu keegi parasjagu soovib.

Näide 2.2 *Kasutades muutuva pikkusega vahemikke sagedustabeli koostamisel võib hooletut või kehva ettevalmistusega statistika tarbijat petta andmeid võltsimatta just nii, nagu parasjagu tarvis. Graafikul 2.2 on samad pideva tunnuse väärtused esitatud kahel erineval moel - kasutades võrdse pikkusega vahemikke sagedustabeli koostamisel (soovitatav tegutsemisviis) ja kasutades muutuva pikkusega vahemikke (petturlus pole haritud inimesele sobiv tegutsemisviis).*

Joonis 2.1: Näites 2.1 toodud sagedustabeli põhjal joonistatud histogramm

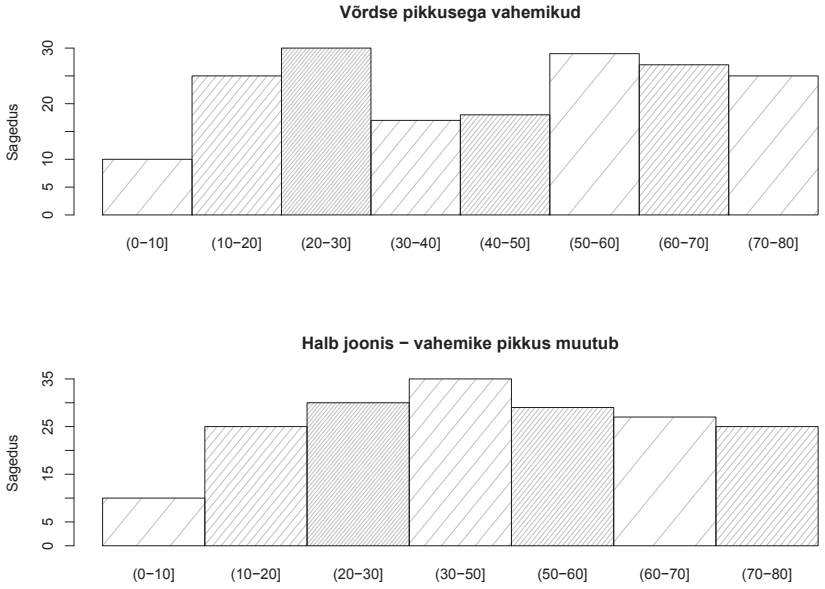


NB! Joonisele tuleb kanda ka vahemikud, kuhu ühtki objekti ei sattunud (kui mingisse vahemikku ei sattunud ühtegi objekti, jätavad paljud programmid sagedustabeli koostamisel vastava rea tabelist välja ja eksitus graafiku joonistamisel on siis juba kerge tulema)!

2.2 Statistikud

Sagedustabel on kasulik viis uuritud tunnuse väärtuste iseloomustamiseks, aga vahel soovime tähelepanu juhtida mõnele meid kõige enam huvitavale andmetega seotud küljele või rõhutatult välja tuua meie andmete omapära. Sealjuures on meile tihti abiks statistikud. *Statistik* on andmete põhjal üheselt arvutatav (enamasti arvuline) näitaja. Arvatavasti tuntuim statistik on keskmine (kõik me oleme muretsenud oma keskmise hinde pärast või lugenud ajalehtedest keskmise palga muutumisest).

Joonis 2.2: Samad andmed - võrdse pikkusega vahemikud ja muutuva pikkusega vahemikud



2.3 Vaatlustulemuste suurust iseloomustavad statistikud

2.3.1 Keskmine

Inglise keeles *mean* või *average*, $\bar{x}$ - uuritava tunnuse väärtuste aritmeetiline keskmine:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}\left(x_1 + x_2 + \ldots + x_n\right).$$

Näide 2.3 *Eesrindlik talunik Sauna Mats hakkas oma tiigis krokodille kasvatama. Kasvatas neid veidi ja mõõtis siis kõigi oma kuue kasvandiku pikku-*

sed ära: 2,3m 1,7m 0,6m 0,8m 1,4m 2,2m. Nende keskmine pikkus on seega

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{6}\left(x_1 + x_2 + \ldots + x_n\right) \\ &= \frac{1}{6}\left(2,3 + 1,7 + 0,6 + 0,8 + 1,4 + 2,2\right) = \frac{1}{6}9 = 1,5\,(m).\end{aligned}$$

Keskmise omadusi:

1. $\overline{cx} = c\bar{x}$, kus c on konstant.

   Tõestus:

   $$\overline{cx} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} cx_i = c \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = c \cdot \overline{x}.$$

   Üks järeldus sellest omadusest: Kui oleksime näiteks samade objektide pikkuseid mõõtnud meetrites (x) ja sentimeetrites ($100x$), siis sentimeetrites tehtud mõõtmiste keskmine ($\overline{100x}$) tuleks sama kui meetrites tehtud mõõtmiste keskmine ($\bar{x}$) korda 100.

2. $\overline{x + c} = \bar{x} + c$, kus c on konstant.

   Tõestus:

   $$\overline{x + c} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i + c) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c = \overline{x} + c.$$

   Kui näiteks peale püütud loomade kaalumist selgus, et kaal polnud täpselt tasakaalus - igal kaalumisel näitas kaal c kilogrammi rohkem, siis valede kaalumiste keskmist $\overline{x + c}$ teades saame arvutada korrektse kaaluga tehtud kaalumiste keskmise: $\bar{x} = \overline{x + c} - c$ ning seega pole keskmise arvutamiseks tarvis mõõtmiseid uuesti teha.

3. $\overline{x + y} = \bar{x} + \bar{y}$

   Tõestus:

$$\begin{aligned}\overline{x+y} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i) = \frac{1}{n}(x_1+x_2+\ldots+x_n+y_1+y_2+\ldots+y_n)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i = \overline{x}+\overline{y}.\end{aligned}$$

Üks tudeng arvutas, kui palju kasvavad keskmiselt taimekesed hommiku ja lõuna jooksul ($\bar{x}$). Teine tudeng leidis õhtu ja öö jooksul toimunud juurdekasvude keskmise ($\bar{y}$). Professor leidis aga taimede keskmise ööpäevase juurdekasvu ($\overline{x+y}$) liites oma kahe tudengi tulemused ning kirjutas selle kohta artikli ise ühtegi mõõtmist tegemata.

4. $\sum_{i=1}^{n} x_i = n\bar{x}$
   Triviaalne, kuid igal juhul meelespidamist vääriv. Näiteks karja summaarne väljalüps on leitav korrutades keskmise väljalüpsi karja suurusega.

Binaarse (kahe võimaliku väärtusega) tunnuse keskmine väärib eraldi ära märkimist. Kui meil on näiteks tegemist tunnusega võimalike väärtustega 0 (parasiite pole) ja 1 (parasiite leidub, n_1 vaatlust), siis taolise tunnuse keskmiseks tuleb 1-tede osakaal (või, korrutatult sajaga, protsent):

$$\overline{x} = \frac{1}{n}(1+0+0+1+0+\ldots) = \frac{n_1}{n}.$$

Seega on taolisel viisil kodeeritud andmete korral keskmise leidmine kerge viis parasiitidega nakatunud isendite protsendi arvutamiseks.

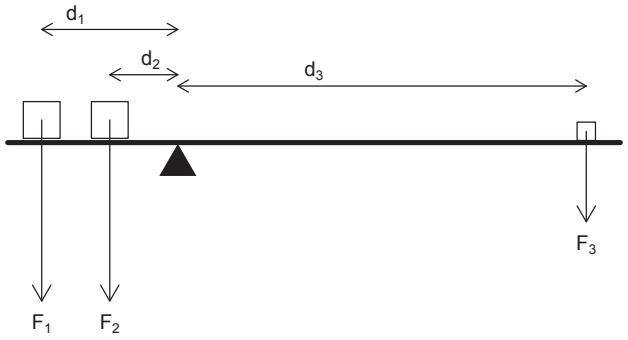
Üks võimalus valimi keskmist paremini tunnetuslikult tajuda on kasutades kangkaalu näidet. Kujutame nüüd endale ette arvtelge, kus tugi on pandud valimikeskmise $\overline{x}$ alla. Laome sellele arvteljele oma vaatlused, kõik kaalult võrdsed. Selgub, et selline kangkaal jääb tasakaalu, kui paigutame tema toetuspunkti valimikeskmise $\overline{x}$ alla.

Toodud väite põhjendus. Vaata joonisel 2.3.1 kujutatud kangkaalu.

Joonisel kujutatud kangkaal püsib tasakaalus kui $F_1 \cdot d_1 + F_2 \cdot d_2 = F_3 \cdot d_3$. Üldisemal kujul kirja pandult: kangkaal püsib tasakaalus, kui mõlemale kangi õlale mõjuvad samasuured jõumomendid: $\sum_{j\in\text{vasak pool}} F_j d_j = \sum_{i\in\text{parem pool}} F_i d_i$.

Valimikeskmisest suurema vaatluse ($x_i > \overline{x}$) kaugus tugipunktist ehk valimikeskmisest on $d_i := x_i - \overline{x}$ ja nende summaarne jõumoment (millega nad kangi paremalt poolt alla suruvad) on $\sum_{x_i>\overline{x}} 1 \cdot d_i = \sum_{x_i>\overline{x}}(x_i - \overline{x})$.

Joonis 2.3: Kangkaal.

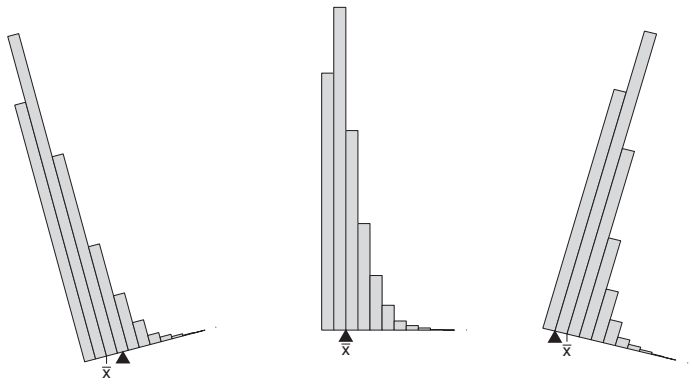


Valimikeskmisest väiksema vaatluse ($x_i < \overline{x}$) kaugus tugipunktist on aga $\overline{x} - x_i$ ja selliste vaatluste summarne jõumoment (millega nad kangi vasakult poolt alla suruvad) on $\sum_{x_i<\overline{x}} 1 \cdot d_i = -\sum_{x_i<\overline{x}}(x_i - \overline{x})$. Selgub aga, et antud juhul ongi mõlemale kaalu õlale mõjuvad jõumomendid võrdsed:

$$
\begin{aligned}
\overline{x} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \\
0 &= \frac{1}{n}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) - n\overline{x}\right) \\
0 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}) \\
0 &= \sum_{x_i<\overline{x}}(x_i - \overline{x}) + \sum_{x_i\geq\overline{x}}(x_i - \overline{x}) \\
-\sum_{x_i<\overline{x}}(x_i - \overline{x}) &= \sum_{x_i\geq\overline{x}}(x_i - \overline{x}) \\
-\sum_{x_i<\overline{x}}(x_i - \overline{x}) &= \sum_{x_j>\overline{x}}(x_i - \overline{x}) + \sum_{x_j=\overline{x}}(x_i - \overline{x}) \\
-\sum_{x_i<\overline{x}}(x_i - \overline{x}) &= \sum_{x_i>\overline{x}}(x_i - \overline{x}) + 0
\end{aligned}
$$

Teades sarnasust kangkaaluga võime ka kergesti lugeda histogrammi pealt välja valimikeskmise ligikaudse väärtuse. Hindame lihtsalt silma järgi koha, kuhu tuleks histogrammi alla paigutada toetuspunkt, nii et histogramm jääks tasakaalu ega vajuks ei paremale ega vasakule poole kaldu, vaata näiteks joonist 2.3.1.

Joonis 2.4: Histogramm ja valimi keskmine



Keskmine pole alati parim näitaja iseloomustamaks uuritava tunnuse väärtuste suurust. Nimelt on aritmeetiline keskmine tundlik üksikute suurte väärtuste suhtes - piisab ühestainsast teistest märgatavalt erinevast vaatlusest, et keskmist tugevalt muuta. Seda illustreerib ka järgmine näide.

Näide 2.4 *Uurides maduusside kaalu, saadi vaatlustulemusteks 2,2kg 2,6kg 2,8kg 2,4kg 10,0kg. Viimane madu on sedavõrd kaalukas, kuna on vahetult enne ülekaalumist nahka pistnud saaklooma.*

$$\bar{x} = \frac{1}{5}(2,2 + 2,6 + 2,8 + 2,4 + 10,0) = 20/5 = 4\,(kg).$$

Selgub, et keskmine kaal tuleb suurem kui enamike usside kaal ja peegeldab tugevalt ebatüüpilise, äsjatoitunud looma kaalu. Kuna keskmine võib olla suurem (või väiksem) kui enamik vaatlustulemusi, tekib lahknevus aritmeetilise keskmise kui näitaja ja keskmise intuitiivse tähenduse vahel (intuitiivselt on ju selge, et "keskmine" madu kaalub vähem kui 4 kg!!). Pakkumaks välja teist matemaatilist näitajat, mis iseloomustab andmete "keskmist" suurust sageli intuitiivselt täpsemalt, on kasutusele võetud mediaan.

2.3.2 Mediaan

inglise keeles *median* (või lühendina *med*) - vaatlustulemus, millest suuremaid ja väiksemaid väärtuseid on samapalju. Mediaani leidmiseks järjestatakse kõik vaatlustulemused, saades nn. variatsioonrea: $x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(n)}$, kus $x_{(1)}$ on kõige väiksem vaatlustulemus, $x_{(2)}$ on suurem kui $x_{(1)}$ kuid väiksem kõigist ülejäänutest jne kuni vaatlustulemuseni $x_{(n)}$, mis on suurem kõigist teistest. Selle järjestatud vaatlustulemustest moodustatud rea keskel asuv vaatlustulemus ongi mediaan. Kui keskmist vaatlustulemust ei saa leida (kui vaatlustulemusi on paarisarv tükki) siis sobib mediaaniks mistahes arv kahe variatsioonrea keskmise elemendi vahel. Kokkuleppeliselt loetakse sellisel juhul mediaaniks kahe variatsioonrea keskel asuva vaatlustulemuse aritmeetilist keskmist. Matemaatiliselt korrektselt kirjapandult: Kui vaatlusi on tehtud paaritu arv kordi, $n = 2k+1$, siis on vaatlustulemuste mediaaniks variatsioonrea $(k+1)$. element $x_{(k+1)}$. Kui vaatlustulemusi oli aga paarisarv, $n = 2k$, siis loetakse vaatluste mediaaniks variatsioonrea k. ja $(k+1)$. elemendi aritmeetilist keskmist: $med(X) = (x_{(k)} + x_{(k+1)})/2$. Variatsioonrea j-ndat elementi, $x_{(j)}$, nimetatakse j.-ndaks järkstatistikuks. Vaatlustulemuse järjekorranumbrit variatsioonreas nimetatakse astakuks.

Näide 2.5 *Leiame eelmises näites toodud maduusside kaalu mediaani. Esmalt järjestame vaatlustulemused leidmaks variatsioonrida ja saame: 2,2 2,4 2,6 2,8 10,0. Kuna vaatlusi on paaritu arv, $n = 5 = 2 \cdot 2 + 1, k = 2$, siis saame mediaaniks variatsioonrea 3. elemendi $med(X) = x_{(2+1)} = x_{(3)} = 2,6$. Tulemus iseloomustab maduusside harilikku kaalu paremini kui keskmine kaal, sest on vähem mõjutatav eriliste üksikisendite (üksikvaatluste) poolt.*

Mediaani omadustest:

erinevatel põhjustel vaatlusandmeid vahel teisendatakse, näiteks logaritmitakse. Juhul, kui kasutatav teisendus ei muuda vaatluste järjekorda (suurim jääb suurimaks jne — või täpsemalt öeldes: kui kasutatav teisendus on monotoonne), siis võime teisendatud andmete mediaani leida tehes esialgsete andmete põhjal leitud mediaaniga sama teisenduse (näiteks logaritmime). Matemaatilisemas keeles öeldult: teostades mistahes andmete monotoonse teisenduse $f(x)$, st asendades vaatlusandmed $x_1, x_2, \ldots, x_n$ teisendatud vaatlusandmetega $x_1^{uus} = f(x_1), \ldots, x_n^{uus} = f(x_n)$ võime teisendatud andmete mediaani arvutada esialgsete andmete mediaani kasutades:

$$med(x^{uus}) = f(med(x)).$$

Samuti tuleks meeles pidada, et mediaani ja vaatluste arvu teades ei saa välja rehkendada vaatluste summat — mis on tuntav puudus. Riigi mediaan-

palka ja töötegijate arvu teades pole riigiametnikul või ärimehel võimalik leida summaarset palkadena ringlevat rahasummat; päevaste läbimüükide mediaani teades ei saa poodnik leida kuu summaarset läbimüüki jne.

Teatavatel juhtudel võib mediaan osutuda liiga "tuimaks" statistikuks: kuigi andmed muutuvad küllaltki palju, mediaan ei muutu.

Näide 2.6 *Soovime võrrelda linnamüras ja saastas elava linnupaari kurna suurust metsarahus pesitseva linnupaari omaga. Kogutud andmed on järgmised:*

Linnas pesitsevad linnud: 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2

Metsas pesitsevad linnud: 2, 2, 2, 2, 3, 5, 7

Mõlemal juhul tuleb pesakonna suuruse mediaaniks 2 linnupoega. Seega neid kahte gruppi mediaani abil võrreldes me ei märkakski pesitsedukuse erinevust.

Kuna viimases näites ülestõstetud "liigse-tuimuse-probleem" esineb eelkõige järjestus- või diskreetsete tunnuste korral, tasub mediaani kasutada nimetatud tüüpi tunnuste korral üsna ettevaatlikult.

2.3.3 Mood

Inglise keeles *mode*, lühendina ka *mod* — vaatlustulemus, mida esineb kõige rohkem — väärtus, mis on parajasti moes.

Näide 2.7 *Uuriti metsatukas kasvavate seente liigilist koostist. Saadi tulemuseks: puravik, sitaseen, kukeseen, puravik, kukesen, kukeseen, sitaseen, kukeseen.*

mod(X)=kukeseen.

Arvuliste väärtustega tunnuste jaoks moodi leides võime sattuda olukorda, kus iga või enamik vaatlustest teineteisest erinevad (kui mõõta piisavalt täpselt, selgub, et iga maduussi kaal on teistest erinev). Enamasti kasutatakse siis sagedustabeli abi (vaata sagedustabeli koostamist pidevale tunnusele) ja vahemikku, mis osutus kõige populaarsemaks, loetakse moodiks. Sõltuvalt histogrammi kujust räägitakse vahel ka kahemodaalsest jaotusest (histogrammil on kaks eraldipaiknevat tippu), või multimodaalsest jaotusest (rohkem kui kaks eraldipaiknevat tippu).

Küsimus:
Eksperimendi keskmine kestvus on 4 päeva. Kas reserveerides endale aega eksperimendi läbiviimiseks 5 päeva, võime olla kindlad, et jõuame selle ajaga tulemusteni? Mida oleks vaja teada lisaks antud eksperimendi kestvuse kohta, et suudaksime sellele küsimusele vastata?

2.4 Vaatluste hajuvus

Mõnikord on kõik vaatlused igavalt üheülbalised, teinekord on aga iga uus mõõtmistulemus teistest sedavõrd erinev, nagu polekski mõõdetud ühe ja sama tunnuse väärtust. Kui erinevad teineteistest vaatlustulemused antud tunnuse korral võivad olla?

2.4.1 Miinimum ja maksimum

inglise keeles *maximum*, *minimum*, lühendina kui min, max — sageli kasutatavad ja intuitiivselt hästi mõistetavad tunnuse hajuvust (võimalikku varieeruvust) iseloomustavad statistikud. Teades näiteks eksperimendi minimaalset ja maksimaalset võimalikku kestvust, saaksime kindlalt väita, kas meie poolt eksperimendi jaoks planeeritud 5 päevast piisab.

Tunnuse hajuvuse iseloomustamiseks kasutatakse ka maksimumi ja miinimumi vahet ehk haaret (ka variatsiooniulatus, inglise keeles *range*) — maksimumi ja miinimumi vahe:

$$haare = maksimum - miinimum$$

Ehkki kergesti mõistetavad, esineb miinimumi ja maksimumi kasutamisel ka tõsiseid probleeme. Juhul, kui uuritavaks tunnuseks on jalgade arv küülikul, võime kergesti jõuda tulemuseni: jalgu on küülikul 0 (miinimum) kuni 8 (maksimum). Miks? Sest aeg-ajalt sünnib väärarengutega küülikuid, esineb vigastatud loomi jms. Korraliku uuringu ja ausa uurija puhul kirjeldavad miinimum ja maksimum sageli geneetiliselt muteerunud või muidu väga harukordseid ja erandlikke isendeid või juhtumeid. Tänu omadusele kirjeldada kõige veidramaid juhtumeid, võivad miinimum ja maksimum osutuda praktikas kehvasti kasutatavaks - suur osa vaatlustulemusi on enamasti märksa suuremad kui miinimum ja märksa väiksemad kui maksimum. Praktikas aeg-ajalt esinev lähenemisviis, kus uurija oma meele järgi suvaliselt "ebatüüpiliste" isendite mõõtmistulemused minema viskab enne miinimumi ja maksimumi leidmist, pole teaduskirjanduses lubatav - sest iga uurija jaoks

võib "ebatüüpiline" omada erinevat tähendust. See raskendab miinimumi ja maksimumi kasutamist uuritava tunnuse teaduslikul kirjeldamisel, teeb nad aga väärtuslikuks andmetest vigade või veidrike väljaotsimisel.

On ka teine probleem, mis on seotud miinimumi ja maksimumi kasutamisega. Uute mõõtmistulemuste selgumisel saab vaatlustulemuste maksimum ainult kasvada. Näiteks huvitagu meid küülikute kaal. Mõõtnud ära saja või tuhande küüliku kaalud, võib ta ikkagi olla üsna kindel, et kuskil lippab veelgi priskem isend. Sealjuures on üsna võimatu olemasolevate andmete põhjal oletada, kui kaalukas võib olla Eesti Kõige Kaalukam Küülik.

Miinimum ja maksimum on üks võimalus iseloomustada tunnuse hajuvust. Teine võimalus on iseloomustada hajuvust kirjeldades üksikvaatluste kaugust keskmisest. Seda ideed modifitseerides on saadud dispersiooni nime all tuntud statistik.

2.4.2 Dispersioon ja standardhälve

Mõiste dispersiooni vaste inglise keeles on *variance*, tähistus: s^2. Dispersiooni arvutamiseks kasutatakse järgmist valemit:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2.$$

Üksikvaatluste erinevus keskmisest, $x - \overline{x}$, nimetatakse hälbeks. Dispersiooni saab vaadata kui hälvete ruutude keskmist. Miks dispersiooni arvutamisel keskmise leidmiseks kasutatakse jagajana suurust $(n-1)$ tavalise n-i asemel, sellel peatume lähemalt järgmises loengus.

Kui kõik vaatlused on samasuured (kõigil uuritavatel loomadel on neli jalga), siis on kõik hälbed keskmisest nullid ja uuritava suuruse dispersioon on null (tunnuse "jalgade arv" dispersioon on null). Mida erinevamad keskmisest on vaatlused, seda suurem on ka dispersioon.

valimi standardhälve (s) - inglise keeles *standard deviance*, lühendina ka *sd* või *std*. On samuti tunnuse hajuvust kirjeldav näitaja,

$$s = \sqrt{s^2}.$$

Sarnane dispersioonile, kuid on teisendatud viimaks mõõtühikuid võrreldavaks uuritava tunnuse algsete ühikutega. Tunnetuslikult tajutav kui vaatluste teatavat sorti keskmine kaugus keskmisest.

Näide 2.8 *Uuriti kahte gruppi hiiri: metsikuid ja geneetiliselt puhtatõulisi laborihiiri. Mõlemas grupis mõõdeti hiirte reaktsiooni ärritajale. Tulemuseks saadi:*

```
Metsikud hiired: 15, 45, 30, 10, 25
Laborihiired:    20, 25, 30, 25
```

Standardhälbe leidmiseks tuleb esmalt leida mõlema grupi jaoks keskmised:

$$\overline{x_{metsik}} = \frac{1}{5} \times (15 + 45 + 30 + 10 + 25) = 25$$

$$\overline{x_{labor}} = 25$$

Leiame valimi dispersioonid:

$$\begin{aligned} {s_{metsik}}^2 &= \frac{1}{4}((15-25)^2 + (45-25)^2 + (30-25)^2 + (10-25)^2 + (25-25)^2) \\ &= \frac{1}{4}(100 + 400 + 25 + 225 + 0) = 750/4 = 187,5 \\ {s_{labor}}^2 &= \frac{1}{3}((20-25)^2 + (25-25)^2 + (30-25)^2 + (25-25)^2) \\ &= \frac{1}{3}(25 + 0 + 25 + 0) = 50/3 = 16,66... \end{aligned}$$

Kust saame juba valimi standardhälbed mõlema grupi jaoks:

$$\begin{aligned} s_{metsik} &= \sqrt{{s_{metsik}}^2} = \sqrt{187,5} = 13,69\ldots \\ s_{labor} &= \sqrt{{s_{labor}}^2} = \sqrt{16,66\ldots} = 4,08\ldots. \end{aligned}$$

Märkame, et laborihiired reageerivad ärritusele märksa sarnasemalt (neil on väiksem dispersioon ja standardhälve) kui metsikud hiired. Võimalik, et sarnasem reaktsioon on tingitud laborihiirte homogeensemast genofondist.

Standardhälbe ja dispersiooni omadusi: Olgu c konstant ja x uuritav tunnus. Siis

1. $s^2(cx) = c^2 s^2(x)$;
2. $s(cx) = cs(x)$;
3. $s^2(x + c) = s^2(x)$;
4. $s(x + c) = s(x)$;

Tähistuse $s^2(cx)$ all peame silmas suuruste cx dispersiooni (korrutame kõiki uuritava tunnuse x väärtuseid konstandiga c ja arvutame seejärel saadud suuruste dispersiooni), $s^2(x)$ on aga esialgsete x-tunnuse väärtuste dispersioon jne.

Teades vaid uuritava tunnuse keskväärtust (populatsiooni keskmist) ja standardhälvet, võime uuritava tunnuse väärtuste kohta öelda järgmist:

- vähemalt 3/4 uuritava tunnuse väärtustest asuvad keskväärtusele lähemal kui kaks standardhälvet (enamasti asub kahe standardhälbe kaugusel keskväärtusest umbes 95% vaatlustest);

- vähemalt 8/9 uuritava tunnuse väärtustest asub keskväärtusele lähemal kui kolm standardhälvet (enamasti asub kolme standardhälbe kaugusel keskväärtusest rohkem kui 99% vaatlustest).

2.4.3 Kvantiilid

α-kvantiiliks (α-*quantile*) nimetatakse sellist uuritava tunnuse väärtust, millest väiksemate väärtuste osakaal mõõtmistulemuste seas on α. Näiteks 0,1-kvantiil on selline uuritava tunnuse väärtus, millest väiksemad olid 10% meie mõõtmistulemustest ja 0,5-kvantiil on selline väärtus, millest väiksemaid väärtuseid on 50% (0,5-kvantiil on sama mis mediaan). Lisaks 0,5-kvantiilile kasutatakse sageli ka 0,25-kvantiili ja 0,75-kvantiili, mida kutsutakse ka **alumiseks ja ülemiseks kvartiiliks** (*quartile*).

Olukordades, kus tekib tahtmine kasutada (raporteerida) miinimumi ja maksimumi, soovitatakse kaaluda, kas poleks informatiivsem kasutada mõnda väikest ja suurt kvantiili, näiteks 0,05-kvantiili ja 0,95-kvantiili. Sel viisil on võimalik vältida mutantide ja andmesisestusvigade eksitavat mõju meid huvitava tunnuse kirjeldamisel ja langeb ära kiusatus andmete paremaks esitamiseks neid võltsida (ebamugavate vaatlus- või katsetulemuste "unustamise" teel).

Kuidas leida kvartiile? Üks traditsiooniline viis on järgmine: ülemise kvartiili hinnangu saame, kui leiame mediaanist suuremate vaatlustulemuste mediaani (variatsioonrea keskelt kuni lõpuni asuvad variatsioonrea elemendid), alumise kvartiili saamiseks leiame mediaanist väiksemate vaatlustulemuste kvartiili. Kui mediaaniks (mediaani hinnanguks) osutub üks konkreetne variatsioonrea element, siis see vaatlus lisatakse kvartiilide arvutamisel nii mediaanist suuremate kui ka mediaanist väiksemate vaatluste sekka.

Kuna standardhälve ja dispersioon on (samuti nagu keskmine) tugevalt mõjutatavad üksikute vaatluste poolt, kasutatakse vahel alternatiivina ka kvartiiline vahet iseloomustamaks vaatluste hajuvust.

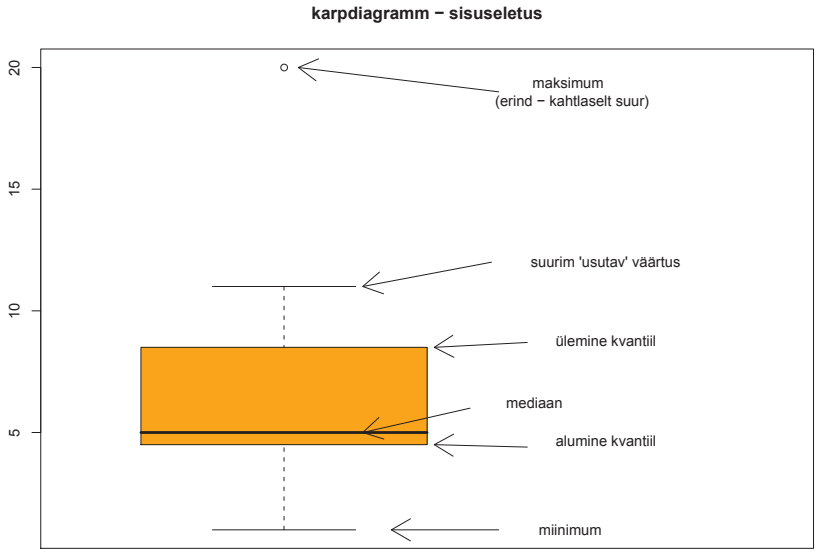
2.4.4 Karp-vurrud diagramm

Lisaks histogrammile kasutatakse pideva (vahel harva ka diskreetse) tunnuse jaotuse iseloomustamiseks ka **karp-vurrud** diagrammi (inglise k. *boxplot*). Karp moodustub ülemise ja alumise kvartiili vahele, karbi peale märgitakse

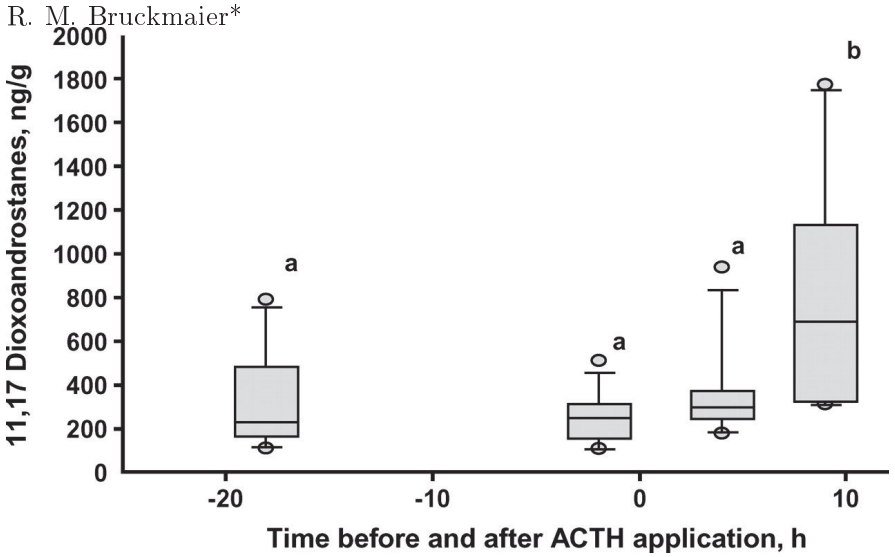
ka mediaani asukoht(alumine kvartiil oli väärtus, millest väiksemaid väärtuseid oli 25%, ülemine kvartiil oli aga väärtus, millest suuremaid väärtuseid oli 25%). Tekkinud karp "sisaldab" 50% vaatlustulemustest. Lisaks kantakse joonisele suurim ja väikseim vaatlustulemus, valimi miinimum ja maksimum. Miinimumi ja maksimumi ühendamisel karbiga tekivadki nn vurrud. Kui mõni valimis esinevatest uuritava tunnuse väärtustest on väga suur (või väga väike), siis ei tõmmata karpdiagrammi vurre mitte päris selle kahtlaselt suure väärtuseni, vaid mõne veidi pisema (paremini "usutava") väärtuseni. Sellisel juhul kantakse see üks (või enam) "kahtlaselt suurt" väärtust graafikule lihtsalt punktikestena. Kuidas arvuti otsustab, millal on vaatlus kahtlaselt suur (või kahtlaselt väike)? Ühtegi mõistlikku, sisuliselt põhjendatud meetodit sellise otsuse tegemiseks ei kasutata. Võib isegi öelda, et arvuti otsustab lihtsalt oma suva järgi (kuigi mõistagi mingit algoritmi kasutades).

Vaata jooniseid 2.5 ja 2.6.

Joonis 2.5: Karpdiagramm koos selgitustega



Joonis 2.6: Karpdiagrammi kasutusnäide artiklist J. Anim. Sci. 2004. 82:563-570 Coping capacity of dairy cows during the change from conventional to automatic milking D. Weiss*, S. Helmreich*, E. Möstldagger, A. Dzidic* and R. M. Bruckmaier*



Tabel 2.3: Tunnuse tüübile sobivad statistikud

	pidev	diskreetne	järjestustunnus	nominaalne
keskmine	+	+	-	-
mediaan	+	+	+	-
mood	+/-	+	+	+
dispersioon	+	+	-	-
standardhälve	+	+	-	-
kvartiilid	+	+	-	-
histogramm	+	+	-	-
tulpdiagramm	-	+	+	+
karpdiagramm	+	+	-	-

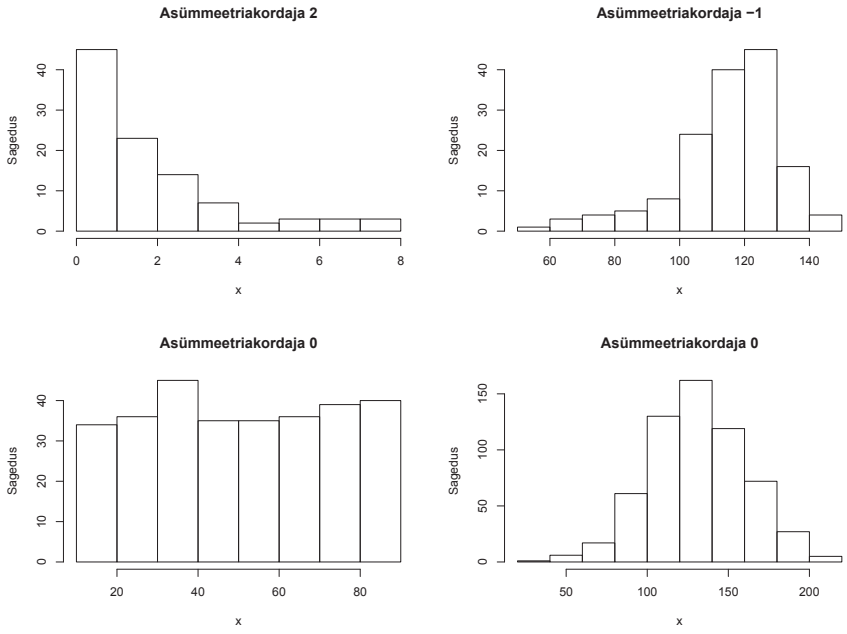
2.5 Teisi statistikuid

Asümmeetriakordaja a:

$$a = \frac{1}{(n-1)s^3} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^3,$$

kus s on standardhälve. Sümmeetrilise jaotuse korral on asümmeetriakordaja a väärtus 0: $a = 0$. Kui esineb üksikuid väga suuri väärtuseid (tunnusel on raske saba paremal), siis on asümmeetriakordaja väärtus positiivne. Kui esineb üksikuid väga väikeseid mõõtmistulemusi, siis on asümeetriakordaja väärtus negatiivne. Vaata ka joonist 2.5. Kasutatakse, kui soovitakse rõhutada vaatluste jaotuse sümmeetrilisust/asümmeetrilisust.

Joonis 2.7: Asümmeetriakordaja väärtused erinevate jaotuste korral



Variatsioonikordaja c_v:

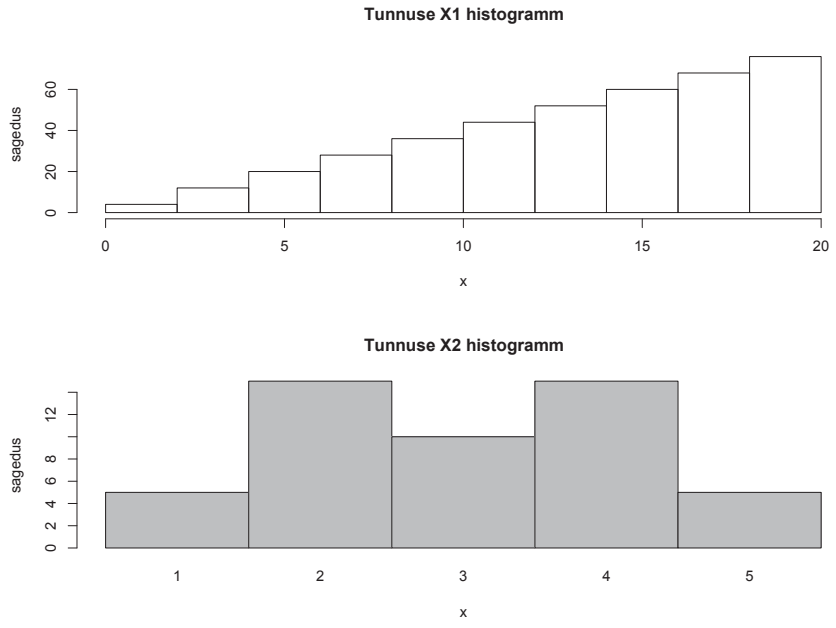
$$c_v = s/\bar{x}.$$

2.6 Ülesanded

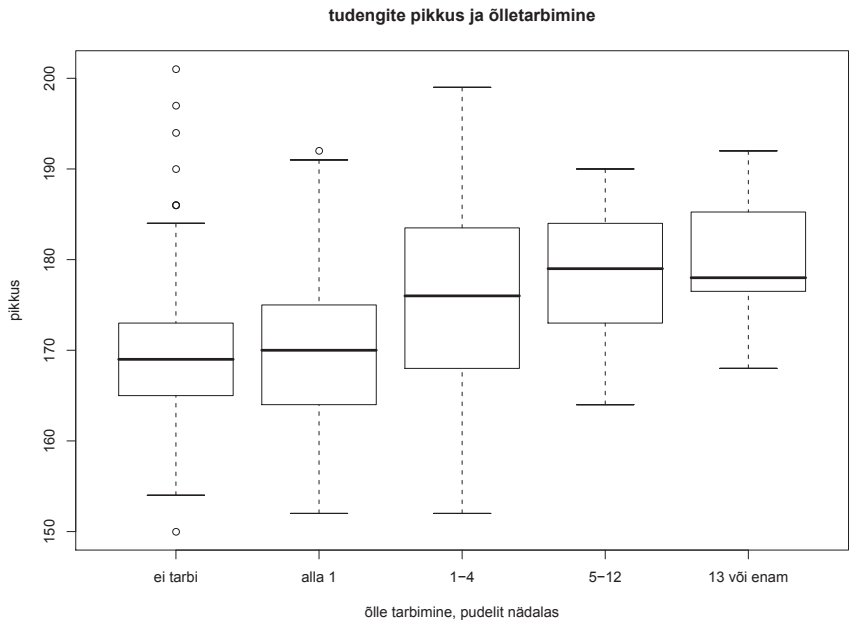
1. Vaata joonisel 1 antud histogramme. Leia nii $X1$ kui $X2$ oletuslik keskmine, dispersioon, mediaan, standardhälve.

2. Joonisel 2 on toodud karpdiagrammid tudengite pikkusele. Kuidas muutub tudengite pikkus sõltuvalt tarbitud õlle kogusest? Millest võiks see olla tingitud?

Joonis 2.8: Ülesanne 1 — milline võiks olla keskmine, standardhälve, mediaan ja dispersioon?



Joonis 2.9: Ülesanne 2. Tartu Ülikooli tudengid ja õlu.



Peatükk 3

Valim ja populatsioon

Õpime tükikeste põhjal ette kujutama tervikut
ehk
Valikust, valimist ja esindavast valimist

Oma uurimistööd tehes uurime enamasti läbi vaid killukese meid huvitavatest objektidest. Soovides teada, kui levinud on ebaseaduslikud metsaraied, jõuame ehk üle vaadata vaid paarsada metsatukka — aga nende paarisaja koha põhjal tahaksime kangesti öelda midagi ebaseadusliku metsaraie kohta Eestis tervikuna. Või uurides kartuli viirusnakkuse levikut võime võtta ehk proove sajalt põllult ning määrata, kas elujõulist viirust esineb meie proovides või mitte - aga suurem huvi oleks nähtavasti ikka öelda, kas antud viirushaigus on käesoleval aastal Eestis laialt levinud või mitte (ja seda väites tahame, et meie väide kehtiks ikka kõigi põldude kohta). Ning kui püüame kinni 10 jänest ja kirjeldame neid, siis on meie lootuseks ikka see, et sedaviisi saame kirjeldada jäneseid tervikuna, jänest kui liiki. *Populatsioon* on kõigi objektide, isendite, esemete, nähtuste või seisundite kogum, mille kohta soovitakse järeldusi teha. Sageli kasutatakse populatsiooni asemel ka *üldkogumi* mõistet. Populatsiooni defineerides piiritletakse ära uuritav objekt (ruumis, ajas, katsetingimuste kaudu,...).

Näiteid populatsioonidest: Eesti talud aastal 2007; tõve X käes vaevlevad lehmad (nii minevikus, praegu kui ka tulevikus); kõik antud mündiga teha võidavad kulli/kirja viskamised, ...

Kui ei suudeta täpselt kirjeldada populatsiooni, kelle kohta midagi tahetakse väita, siis on esitatud väide ka suuresti kasutu. Näiteks väide: väetamine väetisega XYZ tõstab nisu saagikust kaks korda on vaid eksitava tähtsusega, kui ei teata, millise populatsiooni kohta antud väide kehtib (nisu kasvatamisel troopilisel Borneo saarel vihmaperioodil piirkondades, kus

uugu-mangod võivad vabalt ringi liikuda ja põldudelt vilja süüa — nimelt muudab vastav väetis nisu uugu-mangodele mürgiseks ja seetõttu jääb rohkem saaki inimestele).

Üldkogumi neid objekte, mida on vaadeldud või uurimiseks välja valitud, kutsutakse *valimiks*.

Populatsiooni kohta järelduste tegemiseks pole kõik valimid ühtmoodi head. Soovides näiteks uurida, milline on Eesti talude majanduslik seisund, siis on vähe kasu, kui meie kasutada on andmed kümne hiljuti pankrotistunud talu kohta. Hoopis parem oleks valim, kus virelevaid ja õitsvaid talusid oleks ligikaudu samas proportsioonis kui populatsioonis tervikuna. Valimit, kus uuritava tunnuse jaotus on enam-vähem samasugune kui populatsioonis, nimetatakse *esindavaks*. Hea valimi saamiseks on väga tähtis valimi moodustamise eeskiri — valikueeskiri ehk -disain.

Parim juht on loomulikult siis, kui valim ja populatsioon kattuvad. Sellisel juhul on valimi esindav ja taolisel valimil teostatud uuringut nimetatakse *kõikseks uuringuks*. Paraku tuleb kõikseid uuringuid elus harva ette. Näiteks välistab kõikne uuring oma loomult igasugused teaduslikel alustel tehtavad tulevikuprognoosid (kui populatsioon haaraks ka tulevikus eksisteerivaid objekte/sündmuseid – näiteks järgmisel aastal sündivaid jäneseid – siis peaks kõikse uuringu korral olema meie andmestikus andmed ka järgmisel aastal sündivate jäneste kohta).

Esialgu ehk veidi üllatavalt selgub, et üks parimaid viise esindava valimi saamiseks on valimisse sattuvate objektide valimine juhuslikult.

Olgu igal populatsiooni kuuluval objektil võrdne võimalus sattuda valimi esimeseks objektiks. Olgu sõltumata sellest, kes või mis sattus valimi esimeseks objektiks (keda me esimesena mõõtsime) ikka igal uuritavasse populatsiooni kuuluval objektil ikka võrdne võimalus sattuda ka valimi teiseks objektiks (st. kui me esimesena küsitlesime Jaani, siis Jaanil on ikka teistega võrdne võimalus sattuda teiseks küsitletuks...), olgu kõigil samamoodi võrdne võimalus sattuda valimi kolmandaks objektiks jne. Sellisel viisil moodustatud valimit kutsutakse **lihtsaks juhuslikuks valimiks (tagasipanekuga)**, valimi moodustamise protseduuri tuntakse aga kui **lihtsat juhuslikku valikut**.

Enamik tavakasutuses olevaid statistikameetodeid eeldab, et uuritav valim on saadud lihtsa juhusliku valiku abil.

Kui kord valimisse sattunud objektil pole enam võimalik uuesti valimisse sattuda, kuid kõigil populatsiooni kuuluvatel isenditel on siiski võrdne valimisse valituks osutumise võimalus (ja kui ka mistahes populatsiooni kuuluval n objektil on samasuur võimalus koos samasse valimisse sattuda kui mistahes teisel n elemendilisel uuritavasse populatsiooni kuuluval isendite grupil)

siis räägitakse **tagasipanekuta lihtsast juhuslikust valimist** (näiteks kui inimesi valitakse uuringusse juhuslikult ja järgneva uuritava valimisel ei sõltu otsus sellest, kes eelnevalt valitud osutus, aga valikut tehakse siiski veel uurimata jäänute seast — ehk Jaani siiski kaks korda järjest ei küsitleta). Kui uuritav populatsioon on suur (näiteks lõpmatult suur), siis sobivad ka tagasipanekuta lihtsa juhusliku valimi uurimiseks needsamad statistilised meetodid, mis kõlbasid ka tagasipanekuga lihtsa juhusliku valimi uurimiseks. Kui uuritav populatsioon on väga väike, siis võib kaaluda spetsiaalseid lõpliku üldkogumi uurimiseks mõeldud statistiliste meetodite kasutamist.

Miks aitab lihtne juhuslik valik saada esindavat valimit?

Selle mõistmiseks tutvustame suurte arvude seaduseid.

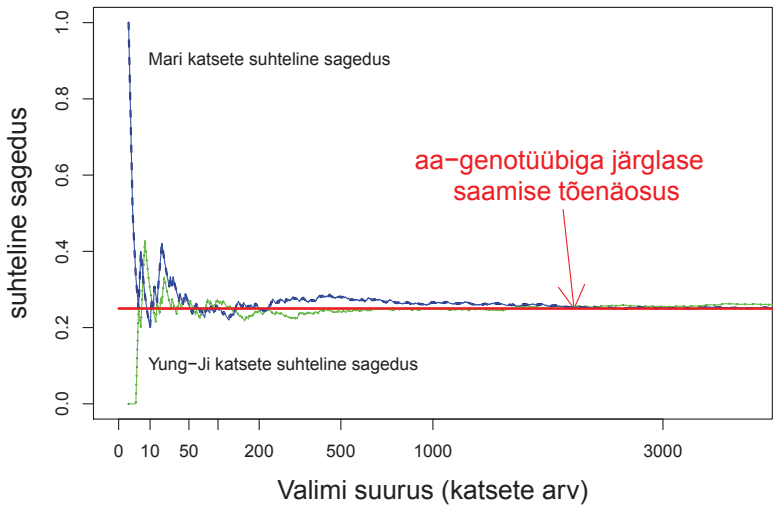
Oletame, et kordame mingit katset sõltumatult n korda ja loeme kokku, mitmel korral neist katsetest toimus meid huvitav sündmus A. Suurte arvude seadus (Bernoulli suurte arvude seadus) ütleb, et sündmuse A toimumise suhteline sagedus koondub katsete arvu lähenemisel lõpmatusele sündmuse A toimumise tõenäosuseks,

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{\text{sündmuse A toimumiste arv}}{\text{katsete koguarv } n}.$$

Näiteks kui kaks teadlast, Mari Tartu Ülikoolist ja Yung-Ji Pekingi 23. riiklikust ülikoolist uurivad sama nähtust, näiteks heterosügootsetel vanematel (Aa ja Aa-genotüübiga vanematel) homosügootse aa-genotüübiga järglase saamise tõenäosust, siis mõlemal teadlasel heterosügootsete järglaste suhteline arvukus (aa-genotüübiga järglaste arv jagatud kõigi järglaste arvuga) koondub katsete arvu kasvades homosügootse järglase sündimise tõenäosuseks (mis antud juhul on 0,25), vaata ka joonist 3.1.

Suurte arvude seadusest järeldub, et kui korrates katset (nopime populatsioonist valimisse ühe uuritava objekti) palju kordi (sõltumatult — st me ei vali järgmisena nopitavat selle põhjal, kes meil varem valimis oli), siis koondub mistahes omaduse (loom on emane; katsetaim kasvab kolme kuuga pikemaks kui 25 cm; järglane on heterosügootne; ...) suhteline esinemissagedus võrdseks selle omaduse esinemistõenäosusega. Kui aga kõigil populatsiooni isenditel on võrdne võimalus sattuda valimisse, siis on sellesama omaduse esinemistõenäosus võrdne selle omadusega objektide osakaaluga populatsioonis.

Vaata ka alltoodud tabelit 3.1, kus on näha, kuidas lihtsa juhusliku valiku abil saadud valimis tunnuse jaotus muutub valimi suuruse kasvades üha sarnasemaks populatsiooni jaotusega (mida me üldjuhul ei tea).



Joonis 3.1: Heterosügootsetel (Aa-genotüübiga) vanematel homosügootse (aa-genotüübiga) järglase saamise tõenäosus ja suhteline sagedus

Tabel 3.1: Populatsiooni ja valimi jaotus

Uuritava tunnuse väärtused	Populatsiooni jaotus	Valimi jaotus			
		n=20	n=40	n=100	n=500
Hall	60%	45%	62,5%	62,0%	60,0%
Must	35%	55%	30,0%	36,0%	34,8%
Valge	5%	0%	7,5%	2,0%	5,2%

Peatükk 4

Populatsiooni parameetrite hindamine. Hinnangu viga

Enamasti pakuvad uurijale huvi populatsiooni iseloomustavad näitajad, mitte aga valimit iseloomustavad statistikud. Näiteks võib meid huvitada, kui kõrge on sordi XYZ idanemisprotsent, aga see, kui mitu sordi XYZ tera läheb idanema meie valimis, huvitab meid vaid sedavõrd, kuivõrd ta aitab vastata üldisemale, populatsiooni puudutavale küsimusele.

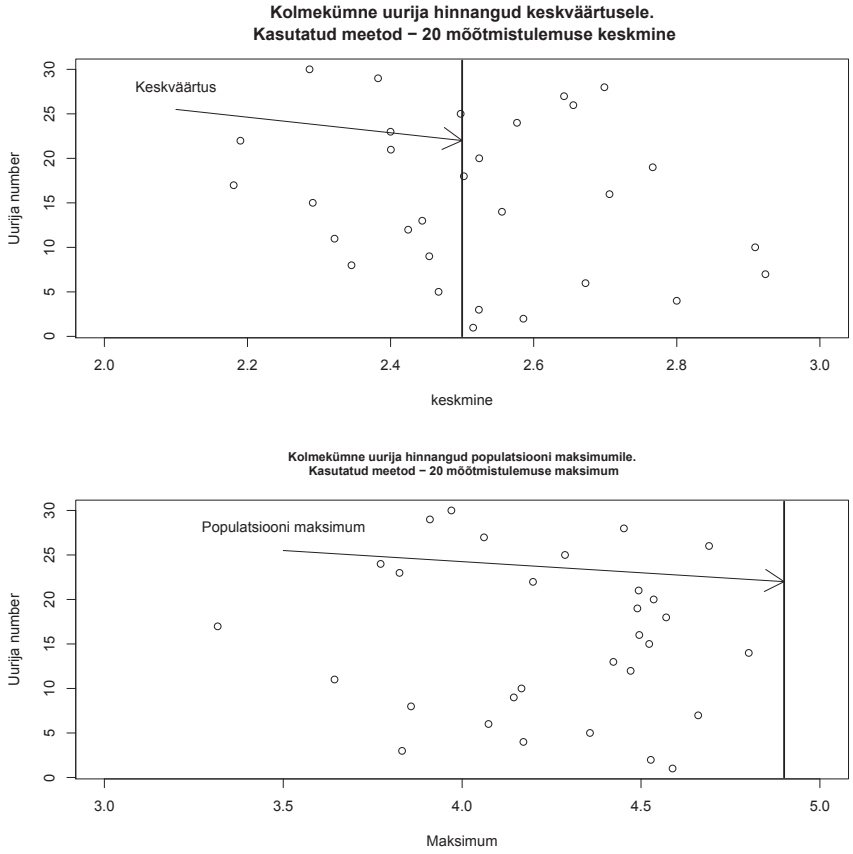
Populatsiooni parameetrite hindamiseks on mitmeid võimalusi. Tegelikku idanemisprotsenti võime hinnata kasutades kohvipaksu, valimi põhjal midagi arvutades või kasutades veel mõnda muud lähenemisviisi (näiteks alati pakkudes välja väärtust 3).

Saades hinnangud kolmel erineval viisil (kolm numbrit) võib olla väga raske öelda, milline neist kolmest numbrist on parim (näiteks lähedaseim õigele väärtusele). Täiesti võimalik, et seekord andis täpseima hinnangu ekspert, kes igale võimalikule küsimusele pakub vastuseks numbrit 3. Siiski on võimalik katsetada erinevaid hindamismeetodeid olukordades, kus me õiget vastust teame, ja vaadata, kui hästi erinevad hindamismeetodid suudavad õiget vastust ära arvata. Hiljem võime siis ehk meelsamini usaldada sellist metoodikat, mis võrreldes teistega tuntud olukordades paremini on töödanud. Seega valime hindamismetoodika selle järgi, millised on meetodi kui sellise omadused, ja mitte selle järgi, milline meetod meie valimi põhjal annab täpseima vastuse (seda me lihtsalt ei tea).

Millised peaksid olema hea hindamismeetodika omadused? Kaks olulist omadust on nihketus (nihkega hinnang võib pakkuda hinnanguid, mis kipuvad õigest väärtusest näiteks alatihti suuremad olema, nihketa hinnang aga ei tee süstemaatilist ehk tahtlikku viga üheski suunas) ja omadus anda

olemasoleva informatsiooni põhjal kõige täpsemaid hinnanguid (efektiivsus).

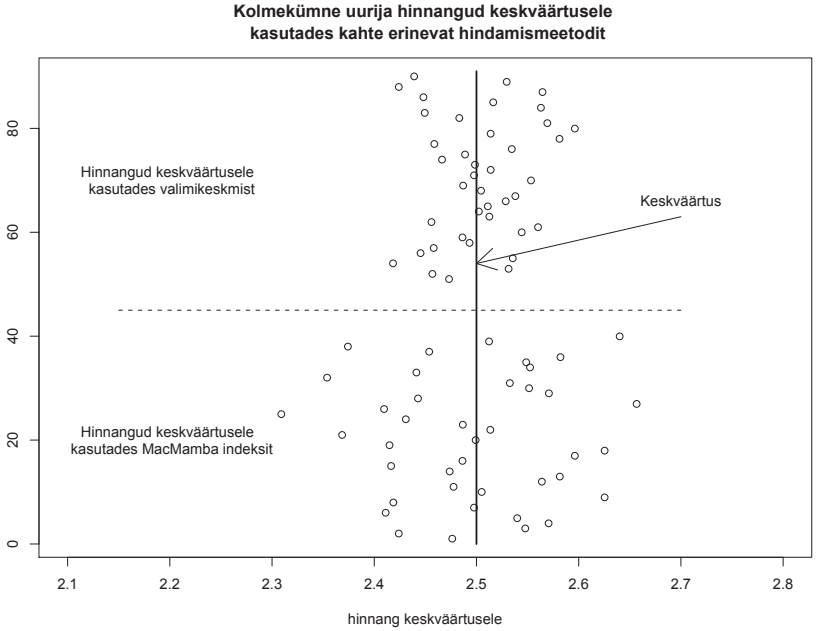
Joonis 4.1: Näide nihketa ja nihkega hinnangust



Populatsiooni väärtustest rääkimisest tuleb õppida vahet tegema tegelikul, aga meile teadmata väärtusel ja ühel või mitmel selle populatsiooni väärtuse hinnangul. Sagedamini kasutavate näitajate jaoks on isegi välja mõeldud erinevad tähistused. Näiteks populatsiooni keskmise ehk keskväärtuse tähistamiseks kasutatakse sageli järgmiseid sümboleid: $\mathrm{E}X$, μ; valimi keskväärtust tähistatakse aga sümboliga $\bar{x}$. Tabelis 4.1 on ära toodud populatsiooni parameetrite enamlevinud tähistused ja nende hindamiseks kasutatavate valimi näitajate nimed ja tähistused.

Kui huvipakkuva väärtuse hinnanguks on üks konkreetne arv, näiteks kui hindame keskväärtust kasutades valimi keskmist, siis räägitakse, et tegemist

Joonis 4.2: Näide täpsemast ja vähemtäpsemast meetodist



Tabel 4.1: Populatsiooni parameetreid ja nende hinnanguid

Populatsiooni parameeter	hinnang valimi põhjal
keskväärtus $\mathrm{E}X$, μ	keskmine $\bar{x}$
populatsiooni dispersioon $\mathrm{D}X$, σ^2	valimi dispersioon s^2
populatsiooni standardhälve σ	valimi standardhälve s
populatsiooni mediaan $\mathrm{med}(X)$	valimi mediaan $\hat{med}(X)$
populatsiooni α-kvartiil q_α	valimi α-kvartiil $\hat{q}_\alpha$

on punkthinnanguga. Märkimaks, et tegemist on hinnanguga, kirjutatakse sageli arvkarakteristikut iseloomustava sümboli kohale laineke, katuseke,

tärn vms.

4.1 Punkthinnangu viga

Kuna iga teadlane kasutab populatsiooni kirjeldamiseks erinevat juhuslikku valimit, siis erinevate uurijate poolt antud populatsiooni kirjeldused (hinnangud) paraku ei kattu teineteisega (ning erinevad ka populatsiooni tegelikest parameetritest). Illustreerimaks seda väidet toome järgmise näite.

Näide 4.1 *Tuntakse huvi rannateo tööstusliku kasvatamise võimaluste vastu Eestis. Üks oluline parameeter, mida kasvatustiikide planeerimisel teadma peab, on see, mitu järglast rannatigu kasvatustiigis Eesti oludes keskmiselt ilmale toob. Saamaks informatsiooni järglaste arvu keskväärtuse kohta, luges vapper doktorant Juhan Kajakas üle 100 rannateo järglased. Oma valimi põhjal leidis Juhan Kajakas, et rannateol on keskmiselt 28,8 järglast.*

Samas tunnevad Eestis rannateo kasvatuse avamise vastu huvi ka hiinlased. Nii saabus siia Hung-Hang, väärikas Pekingist pärit teadlane ja luges samuti üle 100 rannateo järglased ning sai oma valimi keskmiseks 30,6. Peagi olid kohal ka teadlased teistest piirkondadest ning igaüks otsis sama metoodika alusel vastust samale küsimusele - kui palju järglaseid annab rannatigu keskmiselt Eesti oludes. Igaüks neist sai vastuseks veidi erineva numbri. Saadud hinnangud on esitatud joonisel 4.1.

Teades kõigi nende uuringute tulemusi, on lihtne iseloomustada uuringu metoodika täpsust - kasutades näiteks uuringukeskmiste dispersiooni või standardhälvet, saame kirjeldada, kui kaugele võivad erinevad sama metoodikat kasutavate uuringute tulemused teineteisest tulla. Paraku pole meil uuringut teostades enamasti võimalik kasutada teiste sarnaste uuringute tulemusi (kui küsimust oleks juba uuritud, oleks rahastajate huvi antud küsimuse vastu juba märksa väiksem...). Üldjuhul pole ühe juhusliku suuruse väärtuse põhjal võimalik hinnata tema dispersiooni (Miks?). Uurides aga hoolikalt dispersiooni omadusi, selgub, et uuringukeskmise dispersiooni leidmine on võimalik ka siis, kui tehtud on kõigest üksainus uuring.

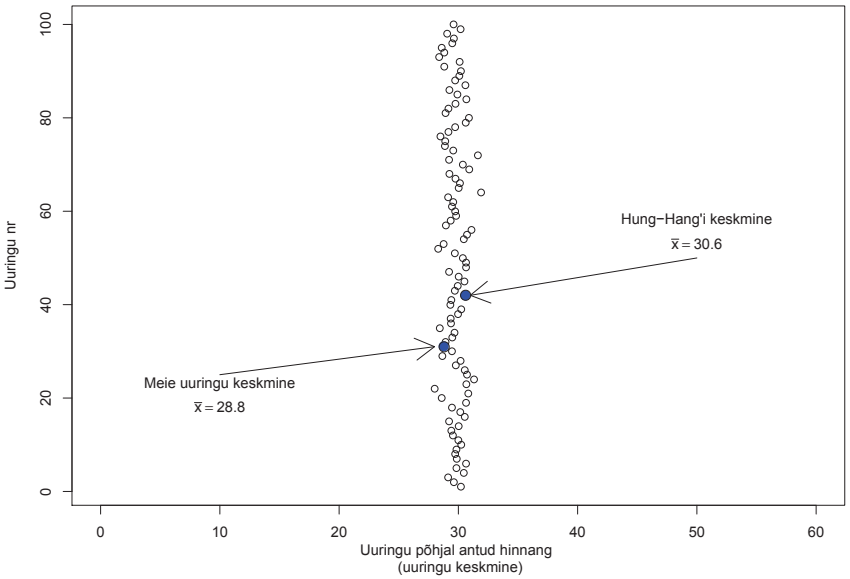
4.1.1 Dispersiooni omadusi

Populatsiooni dispersioon defineeritakse kui uuritava tunnuse väärtuste keskmine ruutkaugus keskväärtusest:

$$DX := E(X - EX)^2 = E(X^2) - (EX)^2.$$

Dispersiooni omadusi:

Joonis 4.3: Saja sama metoodikaga tehtud uuringu tulemused



1. Juhusliku suuruse X ja konstandi c korral $D(cX) = c^2DX$;

2. Juhusliku suuruse X ja konstandi c korral $D(X + c) = DX$;

3. Kui juhuslikud suurused X ja Y on sõltumatud, siis $D(X + Y) = DX + DY$.

4. Kui uuritava tunnuse X dispersioon populatsioonis on σ^2, siis valimi keskmise dispersioon on σ^2/n, kus n tähistab valimi suurust.

Viimase väite ka tõestame:

$$\begin{aligned} D(\bar{X}) &= D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\ &\overset{(1)}{=} \frac{1}{n^2} D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\ &\overset{(3)}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D\left(X_i\right) \\ &= \frac{1}{n^2} n\sigma^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

Kasutades dispersiooni omadust 4 saame (korrektse juhusliku valimi korral) leida hinnangu valimi keskmise dispersioonile, ilma, et peaksime teadma teiste uurijate tulemusi. Nimelt oskame hinnata populatsiooni dispersiooni σ^2, kasutades valimi dispersiooni s^2. Seega hinnates keskväärtust kasutades valimi keskmist, oskame kirjeldada oma hinnangu täpsust - valimi keskmise dispersiooni hinnang on s^2/n.

Lisaks tasub märgata, et suure valimi korral on valimi keskmise jaotuseks normaaljaotus. Nimelt paljude enam-vähem võrdse suurusega juhuslike suuruste summa jaotuseks on normaaljaotus. Seetõttu saame väita, et suure valimi korral on valimi keskmise jaotuseks normaaljaotus:

$$\bar{X} \sim N(\mu; \sigma^2/n).$$

4.2 Standardviga

Parameetri hinnangu standardhälvet nimetatakse standardveaks — inglise keeles *standard error*, lühendina kasutatakse sageli tähekombinatsioone *se* või *s.e.*:

$$s.e. = \sqrt{\hat{D}(\bar{X})} = \sqrt{s^2/n} = s/\sqrt{n}.$$

Sageli esitatakse teaduskirjanduses hinnatud parameeter (näiteks valimi keskmine) koos standardveaga, sageli kujul *keskmine* $\pm$ *standardviga* või *keskmine*(*standardviga*). Näiteks: sort A saagikus oli $12,3 \pm 0,7$ tonni/ha.

Hoiatus! Sama kirjapilti kasutades lisatakse vahel keskmise taha hoopistükkis uuritava tunnuse standardhälve. Sestap tuleks ise artiklit kirjutades

kuskil ära märkida, mida käesolevas artiklis keskmise taha kirjutatud arvud tähendavad – kas standardviga või standardhälvet.

Kumba numbrit, kas standardviga või standardhälvet peaksin mina oma artiklis keskmise taha kirjutama? Vastus sõltub mõnevõrra sellest, mida tahetakse artikli lugejale öelda. Kui soovitakse enam edasi anda algse tunnuse väärtuste hajuvust (kui mina külvaksin oma põllule seemet sordist A, siis kuivõrd erineva saagi ma keskmisest võin saada), siis oleks soovitav kasutada standardhälvet. Kui aga põhitähelepanu on keskväärtuste võrdlemisel (kas sort A saagikuse keskväärtus on ikka parem sort B või sort C saagikuse keskväärtusest), on soovitavam lisada keskmiste taha hinnangu täpsust kirjeldav standardviga.