

Jaotuste pered

Sarnased jaotused kuuluvad ühte jaotuste perekonda

k	1	2	5	10	20	50	100	200
$P(X=k)$	0.12	0.06	0.20	0.12	0.12	0.06	0.18	0.14

k	7	70	700	7000
$P(X=k)$	0.1	0.2	0.3	0.4

k	1	2	3	4	5	6
$P(X=k)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

k	1	0
$P(X=k)$	0.65	0.35

k	1	0
$P(X=k)$	0.1	0.9

k	1	0
$P(X=k)$	0.8	0.2

Bernoulli jaotuste pere

Kui juhuslikul suurusel on kaks võimalikku väärtust (0/1), siis kuulub selle juhusliku suuruse jaotus Bernoulli jaotuste perekonda.

Bernoulli perekonda kuuluvad näiteks:

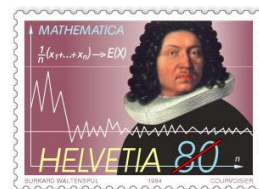
Munast kooruva tibupoja soo jaotus

k	0 (=isane)	1 (=emane)
$P(X=k)$	0,508	0,492

Külvatud seemnekese idanemise jaotus

k	0 (=ei idane)	1 (=idaneb)
$P(X=k)$	0,236	0,764

Kui juhusliku suuruse X jaotus on Bernoulli jaotusega, siis kirjutatakse $X \sim \text{Be}(p)$. Arv p on tõenäosus, et Bernoulli jaotusega juhuslik suurus omandab väärtuse 1.



Jakob Bernoulli (1655-1705):
keskmine koondub
keskväärtuseks; konstant e ; ...

Väide $Y \sim \text{Be}(0.27)$ määrab
üheselt juhusliku suuruse Y
jaotuse:

k	0	1
$P(Y=k)$	0,73	0,27

Jaotuse parameeter (või parameetrid)

Jaotuse parameetriteks kutsutakse numbrit või numbreid mida teades oskame kõigi ühte perekonda kuuluvate jaotuste seast üles leida just selle ühe ja õige jaotuse.

Bernoulli jaotusega juhusliku suuruse jaotust teame, kui teame ühe nägemise tõenäosust p :

Väide $Y \sim \text{Be}(p=0.27)$ määrab
üheselt juhusliku suuruse Y
jaotuse:

k	0	1
$P(Y=k)$	0,73	0,27

Tõenäosus p on Bernoulli jaotuse parameeter.

Kui teame jaotuse parameetri (või parameetrite) väärtust (ning seda, millisesse jaotuste peresse jaotus kuulub) siis on võimalik leida mistahes väärtuse esinemistõenäosus. Samuti on soovi korral võimalik leida muid meid huvitada võivate arvnäitajate väärtust – näiteks keskväärtust.

Bernoulli jaotusega juhusliku suuruse keskvärtus

Olgu juhuslik suurus X Bernoulli jaotusega (st. tema jaotus kuulub Bernoulli jaotuste perre):

$$X \sim \text{Be}(p).$$

k	0	1
$P(X = k)$	$1 - p$	p

Milline on selle juhusliku suuruse keskvärtus, $E(X)$?

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^k x_i P(X = x_i) \\ &= 0 \cdot P(X = 0) + 1 \cdot P(X = 1) \\ &= P(X = 1) = p \end{aligned}$$

jaotuste pere + jaotuse parameetri (või parameetrite väärtused)

$\Rightarrow$

tead kõike juhusliku suuruse kohta

(keskväärtust; väikseimat võimalikku väärtust; suurimat võimalikku väärtust; dispersiooni; väärtust mida ületavad vaid 5% vaatluseid;

Binoomjaotus ja Poissoni jaotus

(Poissoni jaotuste ja binoomjaotuste perekonnad)

Binoomjaotuste pere

Kordame ühte ja sedasama katset n korda. Katset peavad olema sõltumatud, järgmise katse tulemus ei tohi sõltuda eelneva või eelnenud katsete tulemusest. Iga katse võib kas „õnnestuda“ või „ebaõnnestuda“, üksiku katse õnnestumise tõenäosus olgu p . Meid huvitavaks juhuslikuks suuruseks X on õnnestunud katsete arv – mitu katset neist tehtud n katsest lõppes õnnestumisega. Õnnestunud katsete arvu jaotuseks on binoomjaotus:

$$X \sim B(n; p).$$

Binoomjaotusel on kaks parameetrit:

n – katsete arv;

p – ühe katse õnnestumise tõenäosus.

Binoomjaotuste pere – näide 1

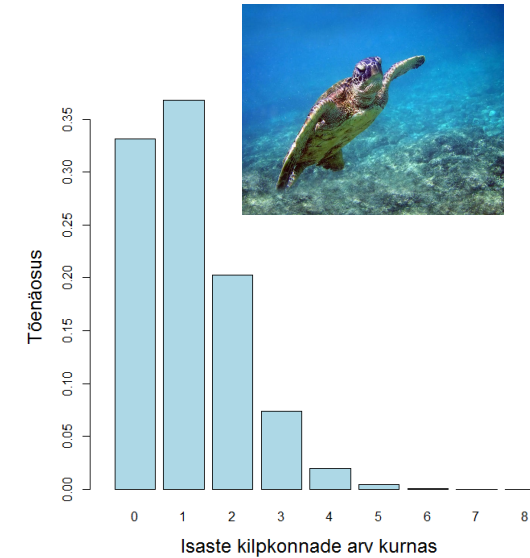
Viskame täringut 4 korda. Loeme kokku mitu ühte saime (X – visatud ühtede arv). Juhusliku suuruse X jaotuseks on binoomjaotus:

$$X \sim B(n=4; p=1/6).$$

Binoomjaotuste pere – näide 2

Roheline merikilpkonn muneb korraga 110 muna. Ühest munast koorub isane kilpkonn tõenäosusega 0,01. Milline on kurnast kooruvate isaste kilpkonnade arvu (X) jaotus?

$$X \sim B(n=110; p=0,01).$$



Tõenäosuste leidmine binoomjaotuse korral – selgitav näide

Olgu $X \sim B(2; 0,1)$.

Milliseid väärtuseid selline juhuslik suurus võib omandada?

Kuidas leida nende väärtuste esinemistõenäosused?

Tõenäosuste leidmine binoomjaotuse korral (üldine juht)

Olgu $X \sim B(n; p)$.

Kui tõenäoliselt õnnestub n -katsest täpselt k katset,

$$P(X=k) = ?$$

Õnnestuvad kas

* k esimest katset ja ülejäänud $n-k$ katset ebaõnnestuvad

$$p^k(1-p)^{n-k}$$

* või õnnestuvad $k-1$ esimest katset, siis üks ebaõnnestub, siis üks õnnestub ja ülejäänud $n-k-1$ katset jälle ebaõnnestuvad

$$p^{k-1}(1-p)p(1-p)^{n-k-1} = p^k(1-p)^{n-k}$$

* või ...

$$p^k(1-p)^{n-k}$$

Tõenäosuste leidmine binoomjaotuse korral (üldine juht)

Olgu $X \sim B(n; p)$.

Kui tõenäoliselt õnnestub n -katsest täpselt k katset,

$$P(X=k) = p^k(1-p)^{n-k} + \dots + p^k(1-p)^{n-k}$$

Kui palju liidetavaid on selles summas?

Nii palju, kui mitmel erineval moel on võimalik noppida k õnnestumist n katse seast ehk C_n^k tükki:

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-k)}$$

Tõenäosuste leidmine binoomjaotuse korral (üldine juht)

Kui

$$X \sim B(n; p)$$

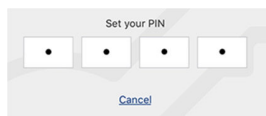
siis

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

kus

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-k)}$$

Tõenäosuste leidmine binoomjaotuse korral (arvutusnäide)



Kui sisestaksime PIN-koodi juhuslikult, siis kui tõenäoliselt saaksime

- a) 4 õiget numbrit
- b) 3 õiget numbrit ja ühe vale numbrit?

Korrektelt sisestatud numbrite arvu X jaotuseks on:
 $X \sim B(n=4; p=0,1)$.

$$X \sim B(n; p)$$

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

$$\begin{aligned} \text{a) } P(X = 4) &= C_4^4 \cdot 0,1^4 \cdot (1 - 0,1)^{4-4} \\ &= 1 \cdot 0,0001 \cdot 1 = 0,0001 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P(X = 3) &= C_4^3 \cdot 0,1^3 \cdot (1 - 0,1)^{4-3} \\ &= 4 \cdot 0,001 \cdot 0,9 = 0,0036 \end{aligned}$$

Binoomjaotusega juhusliku suuruse keskvärtus

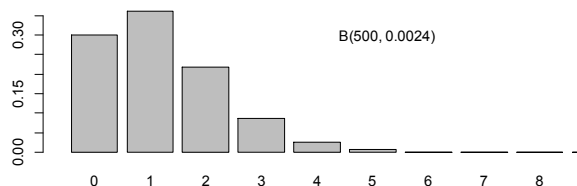
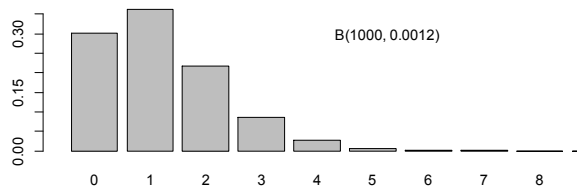
$$X \sim B(n, p)$$

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{i=0}^n i \cdot P(X = i) = \sum_{i=0}^n i C_n^i p^i (1-p)^{(n-i)} \\ &= \sum_{i=1}^n i \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n}{1 \cdot \dots \cdot (i-1) \cdot i \cdot 1 \cdot \dots \cdot (n-i)} p^i (1-p)^{(n-i)} \\ &= n \sum_{i=1}^n \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)}{1 \cdot \dots \cdot (i-1) \cdot 1 \cdot \dots \cdot (n-1-(i-1))} p^i (1-p)^{(n-i)} \\ &= np \sum_{i=1}^n C_{n-1}^{i-1} p^{i-1} (1-p)^{(n-1-(i-1))} = np \end{aligned}$$

jaotusega $B(n-1; p)$ juhusliku suuruse kõigi võimalike väärtuste esinemistõenäosuste summa

Olgu n suur ja p väike.

Erinevad binoomjaotused on sarnased, kui $n \cdot p$ (ehk keskvärtus) on samasuur.



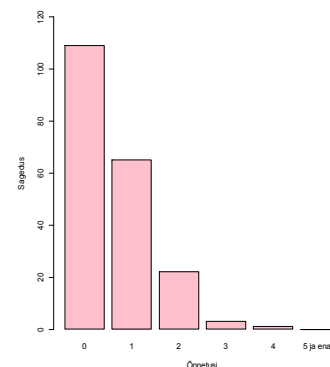
21

Poissoni jaotus

$$X \sim Poi(\lambda)$$

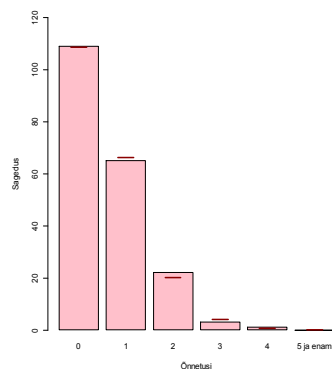
λ - keskmine õnnestuste arv

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$



23

Poissoni jaotus

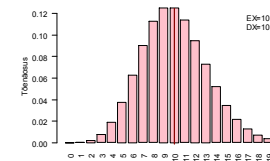
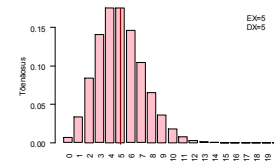
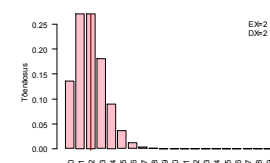
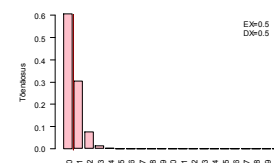


Eeldused:

- Õnnetused toimuvad teineteisest sõltumatult;
- Ohvitser on igas sõjaväeüksuses ligikaudu sama palju – oodatav õnnestuste arv võiks olla sarnane kõigis üksustes

24

Näiteid Poissoni jaotustest



25

Kontrolltöö moodle's

Kontrolltöö (moodle test) avaneb reede õhtul kell 20

Võimalus teha kuni teisipäeval kella 20-ni.