5.3 Friedmani test korduvate väärtuste olemasolu korral

Vahel pole vaatlused üheselt järjestatavad, näiteks siis, kui samal põllul annavad kaks või enam erinevat sorti annavad täpselt sama saagi (*ties*). Sellisel juhul on kombeks kirjutada kokkulangevate vaatluste astakuks nn keskmine astak (*midrank*). Seega kui eri sorti viljade saagid ühel põllul oleksid $290, 310, 310, 325, 325, 325,$ siis vastavad astakud oleksid $1; 2,5; 2,5; 5; 5; 5$. Paraku muutub keskmiste astakute kasutamisel astakute summa dispersioon (väheneb). Selleks, et Friedmani teststatistiku jaotust saaks hii-ruut jaotusega jätkuvalt lähendada, peame kasutama veidi modifitseeritud Friedmani statistikut Q^*:

$$\begin{aligned} Q^* &= Q/konst \\ &= \frac{12n}{k(k+1)}\sum_{i=1}^{k}\left(\overline{R_i}-\frac{k+1}{2}\right)^2 \Bigg/ \left(1-\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{e_j}(d_{ji}^3-d_{ji})/(n*k(k^2-1))\right), \end{aligned}$$

kus e_i näitab, mitu erinevat väärtust on mõõdetud i. põllul ning suurused d_{ij} näitavad i. põllul mõõdetud j. unikaalse väärtuse kohta, mitmel korral sellist väärtust tuli ette i. põllul. Selgitamaks suuruseid e_i ja d_{ij}, teeme läbi ühe lihtsa näite. Olgu meie andmestik järgmine:

põld	sort 1	sort 2	sort 3	sort 4	sort 5
1	120	670	670	680	720
2	860	860	870	870	870
3	600	345	450	432	123
..	..	..	..	..	..

Siis $e_1 = 4; e_2 = 2; e_3 = 5$ ja $d_{11} = 1; d_{12} = 2; d_{13} = 1; d_{14} = 1; d_{21} = 2; d_{22} = 3; d_{13} = 1; \ldots$. Tasub tähele panna, et kui korduseid andmestikus pole, $d_{ij} = 1$, siis $Q^* = Q$.

5.4 Sobitatud juht-kontrolluuring — McNemar'i test

Vaatame lähemalt ühte praktikas sageli ettetulevat erijuhtu-uuringutüüpi. Haruldaste haiguste põhjuste otsimisel küsitletakse esmalt haigeid, mida nad on söönud/teinud (kas nad suitsetavad, kas nad töötavad uraanikaevanduses jne). Siis otsitakse iga haigega sarnane (sama vana, samast soost, sama rikas jne) terve inimene ja küsitakse temalt samu küsimusi. Hiljem soovitakse siis kontrollida, kas riskifaktor (näiteks suitsetamine) võiks olla seotud (põhjustada) haigestumisega. Taolist uuringutüüpi kutsutakse sobitatud juht-kontrolluuringuks (*matched case-control study*). Vaatame järgmist näidet — oletame, et A juhtum-kontroll paari olid sellised, et nii juhtum kui kontroll suitsetasid, B paari olid sellised, et kontroll (terve) ei suitsetanud, aga juhtum (haige) suitsetas jne, vaata ka alljärgnevat tabelit:

		juhtum e. haige	
		suitsetas (1)	ei suitsetanud (0)
kontroll	suitsetas (1)	A	C
	ei suitsetanud (0)	B	D

Milline näeks antud olukorras välja Friedmani teststatistik?

Kuna $k = 2$ siis

$$Q^* = 2n\left((\overline{R}_{juhtum} - 3/2)^2 + (\overline{R}_{kontroll} - 3/2)^2\right)/konst.$$

Jätkamiseks kirjutame välja, millised võimalused on astakute jagunemiseks igas juhtum-kontroll paaris:

vaatlused		astakud		selliste paaride
juhtum	kontroll	juhtum	kontroll	arv
suitsetab	suitsetab	1,5	1,5	A
suitsetab	ei suitseta	2	1	B
ei suitseta	suitsetab	1	2	C
ei suitseta	ei suitseta	1,5	1,5	D

Nüüd näeme, et $\overline{R}_{juhtum} = (1,5A + 2B + 1C + 1,5D)/n$ ja $\overline{R}_{kontroll} = (1,5A + 1B + 2C + 1,5D)/n$ ning

$$\begin{aligned}\overline{R}_{juhtum} - 1,5 &= (1,5A + 2B + 1C + 1,5D)/n - 1,5\\ &= (1,5A + 2B + 1C + 1,5D - 1,5A - 1,5B - 1,5C - 1,5D)/n\\ &= (0,5B - 0,5C)/n,\end{aligned}$$

sest $n = A + B + C + D$. Analoogselt saame, et

$$\overline{R}_{kontroll} - 1,5 = (0,5C - 0,5B)/n.$$

Seega oleme leidnud, et

$$\begin{aligned}Q^* &= 2n\left(\frac{1}{4n}(B - C)^2 + \frac{1}{4n}(B - C)^2\right)/konst\\ &= \frac{1}{n}(B - C)^2/konst\end{aligned}$$

Nüüd on tarvis veel vaid leida konstandi *konst* väärtust. Selleks paneme tähele, et meil iga sõltuvate vaatluste paari korral on suurustel d_{ij} kaks võimalikku väärtust. Kas $d_{i1} = 2$ ($A + D$ juhtu) või $d_{i1} = 1$ ja $d_{i2} = 1$ ($B + C$ juhtu). Seega

$$\begin{aligned} konst &= \left(1 - \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{e_j} (d_{ji}^3 - d_{ji})/(nk(k^2-1))\right) \\ &= 1 - (A+D)(8-2)/(n \cdot 2 \cdot (4-1)) - (B+C)(1-1)/(6n) \\ &= 1 - (A+D)/n \\ &= (B+C)/n. \end{aligned}$$

Lõpptulemuseks seega:

$$\begin{aligned} Q^* &= \frac{1}{n}(B-C)^2/\left((B+C)/n\right) \\ &= (B-C)^2/\left(B+C\right). \end{aligned}$$

Leitud teststatistik peaks siis nullhüpoteesi kehtides olema (suure n korral) ligikaudu hii-ruut jaotusega,

$$(B-C)^2/\left(B+C\right) \sim \chi^2_{df=1}.$$

Friedmani testi erijuhtu, kus on tegemist kahe grupi võrdlusega (juhud/kontrollid) ning kirjeldavalt tunnusel on vaid kaks erinevat võimalikku väärtust (suitsetas/ei suitsetanud) tuntakse McNemari testi nime all.

Näide.
Arsti nimekirjas on 85 Hodgkini tõve (lümfisüsteemi vähkkasvaja) all kannatavat patsienti. Teame, kellel neist on mandlid ära lõigatud ja kellel mitte. Neil on 85 enam-vähem samavana õve (õde või venda). Ka nende kohta teame, kas neil on mandlid opereeritud või mitte. Andmetabel näeb välja järgmine:

		terve õde või vend	
		Mandlitega	Mandliteta
Haige	Mandlitega	37	7
	Mandliteta	15	26

Kust saame $Q = (15-7)^2/(15+7) = 2,909...$ ja testi p-väärtuseks tuleb

0,088.

5.5 Post-hoc testid

Juhul, kui Friedmani testi abil õnnestub tõestada alternatiivne hüpotees, siis tekib küsimus — millised sordid siis ikkagi on teistest paremad? Võrdlemaks sorte omavahel (peale alternatiivse hüpoteesi vastuvõtmist) on välja pakutud paar erinevat meetodit. Kõigepealt võime paarikaupa välja valida töötluseid (sorte) ja teha läbi $k \cdot (k-1)$ võrdlust kasutades Friedmani testi — kuna meetodite paarikaupa võrdlemine Friedmani testi abil on sama mis märgitest, siis võime kasutada ka märgitesti. Iga testi puhul peaksime siis muidugi kasutama olulisuse nivood $\frac{\alpha}{k\cdot(k-1)}$, ehk kasutama Bonferroni korrektsiooni.

Suure valimi korral (n on suur) võime kasutada ka järgmist meetodit, vt Daniel (1990). Loe töötluste (sortide) i ja j vaheline erinevus statistiliselt oluliseks, kui

$$|\overline{R_i} - \overline{R_j}| \leq z_\gamma \sqrt{\frac{k(k+1)}{6n}},$$

kus z_γ on standardse normaaljaotuse $\gamma = 1 - \frac{\alpha}{k(k-1)}$-kvantiil.

Friedmani testi illustreerivas näites peaksime siis uurima, kas keskmiste astakute erinevus tuleb suurem kui $z_{1-0,0083}\sqrt{\frac{3\cdot 4}{6\cdot 4}} = 3,385\ldots$. Kuna toodud näites on maksimaalne keskmiste astakute erinevus $1,75$, siis ei või me takkajärgi ühegi konkreetse sordi kohta öelda, et ta mõnest teisest sordist kindlasti parem on (aga kõik uuritud sordid pole samaväärsed, seda teame me ka!).

5.6 Ajalooline vahepala

Friedman'i testi autor on tõepoolest kuulsa statistiku Harold Hotelling'i (Hotellingi T^2) õpilane, Milton Friedman. Esimest korda kasutas Friedmani omanimelist testi võrdlemaks, kas kulutuste varieeruvus võiks olla erinevate sissetulekutega peredes sarnane või esineb selgeid erinevusi, vaata ka alltoodud andmetabelit tema artiklist:

TABLE I

STANDARD DEVIATIONS AT DIFFERENT INCOME LEVELS* OF EXPENDITURES ON THE MAJOR CATEGORIES DURING 1935–36 OF 246 MINNEAPOLIS AND ST. PAUL FAMILIES OF WAGE-EARNERS AND LOWER SALARIED CLERICAL WORKERS†

Category of expenditure	Annual family income						
	$750–1,000	$1,000–1,250	$1,250–1,500	$1,500–1,750	$1,750–2,000	$2,000–2,250	$2,250 2,500
Housing	$103.3	$68.42	$89.53	$77.94	$100.0	$108.2	$184.9
Household operation	42.19	44.31	60.91	73.90	43.87	61.74	102.3
Food	71.27	81.88	100.71	86.52	100.3	90.75	100.6
Clothing	37.59	60.05	56.97	60.79	71.82	83.04	117.1
Furnishings and equipment	58.31	52.73	96.04	60.42	104.33	89.78	85.77
Transportation	46.27	82.18	129.8	181.0	172.33	164.8	246.8
Recreation	19.00	23.07	38.70	45.81	59.03	50.69	55.18
Personal care	8.31	8.43	9.16	14.28	10.63	15.84	12.50
Medical care	20.15	33.48	60.08	69.35	114.34	45.28	101.6
Education	3.16	4.12	12.73	18.95	8.89	41.52	66.33
Community welfare	4.12	18.87	8.54	12.92	25.30	19.85	16.76
Vocation	7.68	11.18	10.44	10.95	10.54	13.96	14.39
Gifts	5.29	10.91	11.22	25.26	42.25	48.80	69.38
Other	6.00	5.57	22.23	2.45	6.24	1.00	4.00

TABLE II

RANKING OF INCOME LEVELS BY SIZE OF STANDARD DEVIATION FOR EACH CATEGORY OF EXPENDITURE*

Category of expenditure	Annual family income						
	\$750–1,000	\$1,000–1,250	\$1,250–1,500	\$1,500–1,750	\$1,750–2,000	\$2,000–2,250	\$2,250–2,500
Housing	5	1	3	2	4	6	7
Household operation	1	3	4	6	2	5	7
Food	1	2	7	3	5	4	6
Clothing	1	3	2	4	5	6	7
Furnishings and equipment	2	1	6	3	7	5	4
Transportation	1	2	3	6	5	4	7
Recreation	1	2	3	4	7	5	6
Personal care	1	2	3	6	4	7	5
Medical care	1	2	4	5	7	3	6
Education	1	2	4	5	3	6	7
Community welfare	1	5	2	3	7	6	4
Vocation	1	5	2	4	3	6	7
Gifts	1	2	3	4	5	6	7
Other	5	4	7	2	6	1	3
a. Total	23	36	53	57	70	70	83
b. Mean rank	1.643	2.571	3.786	4.071	5.000	5.000	5.929
c. Deviation	−2.357	−1.429	−.214	.071	1.000	1.000	1.929

Sum of squared deviations = 13.3692

$\chi_r^2 = 40.108$