2.3.2 Võrdsed astakud

Pideva tunnuse korral on kahe täpselt võrdse vaatluse saamise tõenäosus 0. Paraku ei taha aga praktika sugugi kuulata teooria sõna. Mõõtmiste ebatäpsusest, vahetulemuste ümmardamisest vms tingitult esineb ikka samasuuri väärtuseid.

Kui mõlema töötluse korral saadakse samasuur uuritava tunnuse väärtus (ei oska öelda, kumb töötlus andis parema tulemuse), ehk töötluste erinevus on 0, siis taolised vaatlused visatakse tüüpiliselt lihtsalt testimise ajaks valimist välja (vähendatakse valimi suurust).

Kui meil on kahel uuritaval indiviidil toimunud (mõõtmistäpsuse piires) samasuur muutus (muutuse absoluutväärtust arvestades) ei oska me ühele muutusele teisest kõrgemat kohta (astakut) omistada. Lahendus on muidugi üsna lihtne — anname kõigile samasuurtele muutustele ühe ja sama astaku väärtuse, milleks oleks nende astakute keskmine. Näiteks kui me ei suuda otsustada, kumb vaatlustest pretendeerib 4. ja kumb 5. kohale, siis anname mõlemale vaatlusele astakuks $(4+5)/2 = 4,5$.

Muutes taolisel viisil astakuid muutuvad muidugi ka väärtused, milliseid statistik W omandada võib. Seega muutub ka Wilcoxoni statistiku jaotus nullhüpoteesi kehtides. Kui vaatame ise paberil läbi statistiku kõik võimalikud väärtused, siis arvatavasti ei teki sellest suuremat probleemi — statistiku jaotustabel tuleb lihtsalt veidi teistsugune kui siis, kui võrdseid vahesid poleks esinenud.

Soovides kasutada statistiku W asümptootilist jaotust, peame samuti arvestama võrdsete vaatlustega — need muudavad mõnevõrra statistiku asümptootilist jaotust.

On lihtne näha, et keskväärtus ei muutu — nullhüpoteesi kehtides jätkuvalt $\mathrm{E}W = 0$. Küll aga muutub Wilcoxoni astakmärgitesti statistiku dispersioon (erinevate väärtuste arv kahaneb — järelikult kahaneb ka varieeruvus). Leiame, kui suur on muutus.

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}W &= \mathrm{D}\sum_{i=1}^{n} Y_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{midrank}(|X_i|)^2 \mathrm{D}(\mathrm{sgn}(X_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{midrank}(|X_i|)^2
\end{aligned}$$

Oletame esmalt, et meil esineb võrdse suurusega vaatluseid vaid ühes kohas — vaatlused $(s+1)$ kuni $(s+t)$ olgu kõik samasuured. Nende vaatluste keskmiseks astakuks oleks $s + (t+1)/2$ ja taoliste astakute ruutude summa on

$$t\left(s+\frac{t+1}{2}\right)^2 = t\left(s^2+s(t+1)+\frac{(t+1)^2}{4}\right).$$

Juhul, kui võrdse suurusega vaatluseid poleks, oleks nendesamade astakute ruutude summaks olnud

$$\sum_{i=1}^{t}(s+i)^2 = ts^2+2st(t+1)/2+t(t+1)(2t+1)/6.$$

Leiame, kui palju muutus astakute ruutude summa:

$$\begin{aligned}
\text{muutus} &= ts^2+2st(t+1)/2+t(t+1)(2t+1)/6-t\left(s^2+s(t+1)+\frac{(t+1)^2}{4}\right)\\
&= t(t+1)(2t+1)/6-t(t+1)^2/4\\
&= t(t+1)[(2t+1)*2-(t+1)*3]/12\\
&= t(t+1)(t-1)/12\\
&= t(t^2-1)/12.
\end{aligned}$$

Olgu meil valimis N' erinevat väärtust, kusjuures j. unikaalset väärtust esinegu t_j korda. Sellisel juhul saame Wilcoxoni astakmärgistatistiku dispersiooni (nullhüpoteesi kehtides) leida järgmise valemi abil:

$$\mathrm{D}W = n(n+1)(2n+1)/6-\sum_{j=1}^{N'}t_j(t_j^2-1)/12.$$

Kui võrdseid vaatluseid on palju, võib dispersioon märkimisväärselt väheneda. NB! Mitte kõik programmid ei pruugi võrdse suurusega vaatluseid kohates kõige mõistlikumalt käituda. Kui võrdseid astakuid on palju, siis võib Wilcoxoni astakmärgitesti statistiku jaotus koonduda normaaljaotuseks aeglaselt (vajame tõesti suurt valimit, enne kui võime kasutada lähendit!)

2.4 Erinevuse kirjeldamine

Mis saab siis, kui me nullhüpoteesi ümber lükkame? On ju tore, kui saame öelda: "uus ravi on parem vanast" või "uus väetis on parem kui vana", aga alati tekib küsimus: Kui palju parem? Kui tänu uuele väetisele saame hektarilt täiendavalt 1 grammi jagu rohkem saaki, siis ei tasu uue väetise eest kallimat hinda maksta. Aga kui tänu uuele ja kallimale väetisele saaksime tonni jagu rohkem saaki, tasuks muutus meile ära. Mõlema kirjeldatud juhu puhul võib Wilcoxoni astaksummatest võtta vastu alternatiivse hüpoteesi (piisavalt suure valimi korral).

Üks võimalus töötlustevahelise erinevuse suuruse kirjeldamiseks oleks järgmine. Me võime arutleda, kui palju me peaksime ühe töötlusega saadud tulemustest maha lahutama, et saada teise töötlusega võrdväärseid (sarnaseid) tulemusi.

Täpsemalt, otsitakse sellist Δ väärtust, et Wilcoxoni teststatistik kinnitaks peale Δ juurdeliitmist uuele töötlusele võimalikult hästi nullhüpoteesi ehk

$$W(Y - X + \Delta) = 0.$$

Antud võrrandil on sageli rohkem kui üks lahend, millisel juhul on sobilik raporteerida lahenditeks sobivate väärtuste lõigu keskpunkti.

Näide 2.3 *Vaatlustulemused (töötluste erinevused) on järgmised: -2,3,6,10,20. Wilcoxoni teststatistiku väärtuseks on* $W = -1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 13$. *Selleks, et saaksime tulemuseks* $W = 0$, *peaksime kõigist erinevustest lahutama 6.5. Sellisel juhul oleksid meie vaatlusteks -8.5, -3.5, -0.5, 3.5, 13.5 ja statistiku väärtus* $W = -4 - 2.5 - 1 + 2.5 + 5 = 0$. *Seega* $\Delta = 6.5$.

Märkus: Otsitav väärtus, Δ, ei ole vahede (töötluste erinevuste) mediaan!

Tehniline märkus: Kuidas leida sobivat Δ väärtust? Üks võimalus oleks järgmine: leia kõikvõimalikud vahede keskmised:

$$[(-2)+(-2)]/2, [(-2)+3]/2, \ldots, [(-2)+20]/2, [3+3]/2, \ldots, [3+20]/2, \ldots [20+20]/2$$

ning leia siis nende $5 * (5 + 1)/2$ keskmise mediaan. Viimane ongi otsitavaks Δ väärtuseks! Kas oskad põhjendada, miks?

Saadud Δ väärtuse interpreteerimine võib ja ei pruugi raskuseid valmistada. Kui töötlused erineksid selle poolest, et üks töötlus lisaks uuritava tunnuse väärtusele alati Δ ühikut juurde (nihutaks uuritava tunnuse väärtuseid: $Y_i = X_i + \Delta$) siis on meie saadud Δ väärtus hinnanguks sellele nihkele. Enamasti pole muidugi töötluse mõju kõigile ühesugune (väetamine aitab mõnda põldu enam kui teist; tänu ravile paraneb mõni inimene kibekiiresti ja teine (haigusest rohkem kurnatud) jääb veel mitmeks päevaks voodisse jne. Seega on igal inimesel/põllul oma isiklik töötluse mõju Δ_i. Juhul, kui juhuslike suuruste Δ_i jaotus oleks sümmeetriline, võiksime enda poolt leitud Δ väärtust käsitleda kui hinnangut juhuslike suuruste Δ_i'de mediaanile.

Aga kas töötluste erinevuste jaotus on ikka sümmeetriline? Märkusena olgu mainitud: kui töötlused on eristamatud, siis on erinevuste jaotus $X - Y$ sümmeetriline.

Heal lapsel on ikka mitu nime. Meie poolt vaadeldud Δ't võib kirjanduses leida nii pseudomediaani (pseudomedian) kui ka Hodges-Lehmann'i hinnangu nime all.

Kui märgitesti statistikut kasutades saime leida usaldusintervalli mediaanile, nii saab Wilcoxoni astakmärgitesti kasutades leida usaldusintervalli pseudomediaanile. Tuleb lihtsalt leida nihete võimalike väärtuste hulk, mille puhul Wilcoxoni astakmärgitest jääb (antud olulisuse nivool) veel nullhüpoteesi juurde.

2.5 Ülesanded

1. Vahel tuntakse Wilcoxoni astakmärgitesti teststatistikuna ka statistikut
$$W_+ = \sum_{i=1}^{n} I(X_i > 0)\text{rank}(|X_i|).$$
Näita, et Wilcoxoni astakmärgitesti olulisustõenäosus (ja testi otsus) milleni jõuame W_+ kasutamisel langeb kokku teststatistiku W kasutamisel saadud tulemustega. Eeldame, et uuritav tunnus on pidev, st $P(X_i = 0) = 0$.

2. Peale ainurakse jagunemist kaheks võetakse üks jagunemisel saadud ainurakne ja antakse talle kerge kuumašokk (kuumutatakse teda veidi). Teine jagunemisel saadud rakk elab senikaua normaaltingimustes. Seejärel pannakse mõlemad ainuraksed külma keskkonda. Jälgitakse, kuna algab eriliste "külmageenide" ekspressioon (kuna neid geene hakatakse kasutama). Soovitakse teada, kas eelnevalt kuumašoki saanud ainuraksetes lülituvad külmageenid sisse samakiiresti kui normaaltingimustes elanud rakul või on hilisemas reaktsioonikiiruses toimunud muutus. Eksperimendi käigus kogutud andmed on järgmised:

ainuraksete paari nr	eelnev kuumašokk, reaktsioonikiirus (ms)	tavatingimused, reaktsioonikiirus (ms)
1	123	125
2	240	275
3	156	160
4	108	112
5	132	140
6	138	137
7	142	151
8	186	200

Kas suudad Wilcoxoni astakmärgitesti abil tõestada erinevust reaktsioonikiirustes? Milline on (kahepoolse) testi olulisustõenäosus (näita arvutusi) ja milline oleks sinu otsus (kui teisiti pole mainitud, kasutame tavapärast olulisuse nivood 0,05).