4.3 F-test hüpoteeside kontrollimiseks mudeli parameetrite kohta

Hinnatava parameeterfunktsiooni $\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{\beta}$ hinnangu jaotuseks (kui vaatlusvektor $\mathbf{y}$ on normaaljaotusega; kehtib ligikaudu ka siis, kui on tegemist suure valimiga...) on normaaljaotus :

$$\boldsymbol{\lambda}^T\hat{\boldsymbol{\beta}} \sim N\left(\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{\beta}; \boldsymbol{\lambda}^T(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^-\boldsymbol{\lambda}\sigma^2\right).$$

Nullhüpoteesi $H_0 : \boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{\beta}_0$ kehtides on seega

$$\frac{\boldsymbol{\lambda}^T\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{\beta}_0}{\sqrt{\boldsymbol{\lambda}^T(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^-\boldsymbol{\lambda}\sigma^2}} \sim N(0;1).$$

ehk

$$\frac{\left(\boldsymbol{\lambda}^T\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{\beta}_0\right)^T\left(\boldsymbol{\lambda}^T\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{\beta}_0\right)}{\boldsymbol{\lambda}^T(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^-\boldsymbol{\lambda}\sigma^2} \sim \chi^2_{\mathrm{df}=1}.$$

Samuti teame (3.1), et

$$\mathbf{y}^T(I - \mathbf{P}_\mathbf{X})\mathbf{y}/\sigma^2 = (n-p)\cdot MSE/\sigma^2 \sim \chi^2_{\mathrm{df}=n-p}$$

ja kuna $\boldsymbol{\lambda}^T\hat{\boldsymbol{\beta}}$ oli sõltumatu MSE'st (vaata peatükki 3), saame kahe hii-ruut jaotusega juhusliku suuruse kombineerimisel F-jaotusega juhusliku suuruse:

$$\frac{\frac{\left(\boldsymbol{\lambda}^T\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{\beta}_0\right)^T\left(\boldsymbol{\lambda}^T\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{\beta}_0\right)}{\boldsymbol{\lambda}^T(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^-\boldsymbol{\lambda}\cdot\sigma^2}/1}{\frac{(n-p)MSE}{\sigma^2}/(n-p)} \overset{H_0}{\sim} F_{\mathrm{df}_1=1;\mathrm{df}_2=n-\mathrm{rank}(\mathbf{X})}$$

$$\frac{\left(\boldsymbol{\lambda}^T\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{\beta}_0\right)^T\left(\boldsymbol{\lambda}^T\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{\beta}_0\right)}{\boldsymbol{\lambda}^T(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^-\boldsymbol{\lambda}\cdot MSE} \overset{H_0}{\sim} F_{\mathrm{df}_1=1;\mathrm{df}_2=n-\mathrm{rank}(\mathbf{X})}.$$

Ühe parameetrite hinnatava lineaarkombinatsiooni kohta hüpoteeside testimiseks meil muidugi F-testi vaja pole — võime ju kasutada juba varem konstrueeritud t-testi. Küll aga võimaldab F-testi kasutav lähenemisviis kontrollida mitme väite samaaegset kehtimist. Näiteks tahame teada, kas samaaegselt kehtivad väited $\boldsymbol{\lambda}_1{}^T\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\lambda}_1{}^T\boldsymbol{\beta}_0$ ja $\boldsymbol{\lambda}_2{}^T\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\lambda}_2{}^T\boldsymbol{\beta}_0$. Kumbagi väidet omaette on võimalik kontrollida t-testi abil, aga kui soovime kontrollida, kas mõlemad hüpoteesid kehtivad samaaegselt (kambatest, *joint test*), siis sellist mitme hüpoteesi samaaegset kehtivust varemtutvustatud t-testi abil kontrollida ei saa. Küll on aga võimalik ülalpool tutvustatud F-testi loogikat üldistada nii, et seda saaks kasutada mitme väite samaaegse kehtimise kontrollimiseks.

Moodustame esmalt maatriksi $\mathbf{\Lambda}$ pannes üksteise peale reavektorid $\boldsymbol{\lambda}_1{}^T$ ja $\boldsymbol{\lambda}_2{}^T$. Nullhüpoteesi kehtides oleks siis

$$\mathbf{\Lambda}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{\Lambda}\boldsymbol{\beta}_0 \overset{H_0}{\sim} N\left(\mathbf{0}; \mathbf{\Lambda}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-}\mathbf{\Lambda}^T\sigma^2\right).$$

Idee: kui leiduks selline 2×2 maatriks $\mathbf{B}$, nii et

$$\mathbf{B}(\mathbf{\Lambda}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{\Lambda}\boldsymbol{\beta}_0) \overset{H_0}{\sim} N\left(\mathbf{0}; \mathbf{I}\right),$$

siis oleks

$$(\mathbf{B}(\mathbf{\Lambda}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{\Lambda}\boldsymbol{\beta}_0))^T\mathbf{B}(\mathbf{\Lambda}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{\Lambda}\boldsymbol{\beta}_0) \overset{H_0}{\sim} \chi^2_{df=2},$$

sest sõltumatute standardsete normaaljaotusega juhuslike suuruste ruutude summa on hii-ruut jaotusega juhuslik suurus. Seejärel saaksime saadud hii-ruut jaotusega juhuslikkus suurust ja suurust $(n-p)MSE/\sigma^2 \sim \chi^2_{df=n-p}$ kasutades moodustada teststatistiku, mille jaotus nullhüpoteesi kehtides oleks $F_{2;n-p}$-jaotus ning saadud teststatistikut võiksimegi kasutada kambatesti tegemiseks.

Kas aga soovitud omadustega maatriks $\mathbf{B}$ eksisteerib ja kuidas teda leida? Sellele küsimusele vastamiseks tutvume sümmeetriliste positiivselt määratud maatriksite (juhuslike suuruste dispersioonimaatriks rahuldab mõlemat nõuet) omadustega.

Olgu maatriks $\mathbf{M}$ mingi sümmeetriline positiivselt määratud reaalaruliste väärtustega maatriks spektraallahutusega $\mathbf{M} = \mathbf{ODO}^T$ (kus $\mathbf{O}$ on omavektorite ortogonaalne maatriks, $\mathbf{O}^T\mathbf{O} = \mathbf{I}$, ja $\mathbf{D}$ on diagonaalmaatriks mille peadiagonaalil on maatriksi $\mathbf{M}$ omaväärtused λ_i). siis võime leida maatriksid $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{OD}^{-1}\mathbf{O}^T$, $\mathbf{M}^{1/2} = \mathbf{OD}^{1/2}\mathbf{O}^T$ ja $\mathbf{M}^{-1/2} = \mathbf{OD}^{-1/2}\mathbf{O}^T$, kus maatriksid $\mathbf{D}^{-1}$, $\mathbf{D}^{1/2}$ ja $\mathbf{D}^{-1/2}$ on diagonaalmaatriksid mille diagonaali elementideks on vastavalt λ_i^{-1}, $\lambda_i^{1/2}$ ja $\lambda_i^{-1/2}$. Kuna eeldasime, et maatriks $\mathbf{M}$ on positiivselt määratud, siis on ka kõik tema omaväärtused positiivsed $\lambda_i > 0, \forall i$, ja järelikult defineeritud maatriksid antud tingimuste kehtides ka eksisteerivad. On lihtne näha, et selliselt konstrueeritud maatriksite puhul

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{M} = \mathbf{OD}^{-1}\mathbf{O}^T \cdot \mathbf{ODO}^T = \mathbf{OD}^{-1}\mathbf{DO}^T = \mathbf{I};$$

$$\mathbf{M}^{1/2}\mathbf{M}^{1/2} = \mathbf{OD}^{1/2}\mathbf{O}^T \cdot \mathbf{OD}^{1/2}\mathbf{O}^T = \mathbf{ODO}^T = \mathbf{M};$$

$$\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{M}^{-1/2} = \mathbf{OD}^{-1/2}\mathbf{O}^T \cdot \mathbf{OD}^{-1/2}\mathbf{O}^T = \mathbf{OD}^{-1}\mathbf{O}^T = \mathbf{M}^{-1}.$$

$$(\mathbf{M}^{-1/2})^T = (\mathbf{OD}^{-1/2}\mathbf{O}^T)^T = \mathbf{OD}^{-1/2}\mathbf{O}^T$$

$$\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{M}\mathbf{M}^{-1/2} = \mathbf{O}\mathbf{D}^{-1/2}\mathbf{O}^T \cdot \mathbf{O}\mathbf{D}\mathbf{O}^T \cdot \mathbf{O}\mathbf{D}^{-1/2}\mathbf{O}^T = \mathbf{I}.$$

Märkus: Maatriksid $\mathbf{M}^{1/2}$ ja $\mathbf{M}^{-1/2}$ pole ainsad sellised maatriksid, mille korrutamisel iseendaga saadakse tulemuseks vastavalt $\mathbf{M}$ ja $\mathbf{M}^{-1}$.

Kuna kovariatsioonimaatriks $\mathbf{\Lambda}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^-\mathbf{\Lambda}^T\sigma^2$ on sümmeetriline ja positiivselt määratud, siis võime ülalkirjeldatud viisil moodustada maatriksi $\left(\mathbf{\Lambda}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^-\mathbf{\Lambda}^T\sigma^2\right)^{-1/2}$ ning märgata, et

$$\begin{aligned}
&\mathrm{D}\left(\left(\mathbf{\Lambda}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^-\mathbf{\Lambda}^T\sigma^2\right)^{-1/2}\left(\mathbf{\Lambda}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{\Lambda}\boldsymbol{\beta}_0\right)\right) = \\
&\quad = \left(\mathbf{\Lambda}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^-\mathbf{\Lambda}^T\sigma^2\right)^{-1/2}\mathrm{D}\left(\mathbf{\Lambda}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{\Lambda}\boldsymbol{\beta}_0\right)\left(\left(\mathbf{\Lambda}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^-\mathbf{\Lambda}^T\sigma^2\right)^{-1/2}\right)^T \\
&\quad = \mathbf{I}.
\end{aligned}$$

Seega

$$\left(\mathbf{\Lambda}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^-\mathbf{\Lambda}^T\sigma^2\right)^{-1/2}\left(\mathbf{\Lambda}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{\Lambda}\boldsymbol{\beta}_0\right) \overset{H_0}{\sim} N(0;\mathbf{I})$$

ning

$$\left(\mathbf{\Lambda}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{\Lambda}\boldsymbol{\beta}_0\right)^T\left(\mathbf{\Lambda}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^-\mathbf{\Lambda}^T\sigma^2\right)^{-1}\left(\mathbf{\Lambda}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{\Lambda}\boldsymbol{\beta}_0\right) \overset{H_0}{\sim} \chi^2_{\mathrm{df}=\mathrm{rank}(\mathbf{\Lambda})}.$$

Kuna

$$(n - \mathrm{rank}(\mathbf{X})) \cdot MSE/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-\mathrm{rank}(\mathbf{X})}$$

siis saame mõlemat hii-ruut jaotusega juhuslikku suurust kasutades konstrueerida F-jaotusega juhusliku suuruse:

$$\frac{\frac{\left(\mathbf{\Lambda}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{\Lambda}\boldsymbol{\beta}_0\right)^T\left(\mathbf{\Lambda}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^-\mathbf{\Lambda}^T\sigma^2\right)^{-1}\left(\mathbf{\Lambda}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{\Lambda}\boldsymbol{\beta}_0\right)}{\mathrm{rank}(\mathbf{\Lambda})}}{\frac{(n-p)MSE/\sigma^2}{n-p}} \overset{H_0}{\sim} F_{\mathrm{df}_1=\mathrm{rank}(\mathbf{\Lambda});\mathrm{df}_2=n-\mathrm{rank}(\mathbf{X})},$$

kust peale $1/\sigma^2$ taandamist saame:

$$\begin{aligned}
&\left(\mathbf{\Lambda}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{\Lambda}\boldsymbol{\beta}_0\right)^T\left(\mathbf{\Lambda}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^-\mathbf{\Lambda}^T \cdot \mathrm{MSE}\right)^{-1}\left(\mathbf{\Lambda}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{\Lambda}\boldsymbol{\beta}_0\right)/\mathrm{rank}(\mathbf{\Lambda}) \overset{H_0}{\sim} \\
&\qquad\qquad \overset{H_0}{\sim} F_{\mathrm{df}_1=\mathrm{rank}(\mathbf{\Lambda});\mathrm{df}_2=n-\mathrm{rank}(\mathbf{X})}.
\end{aligned}$$

Sama tulemust saab kasutada ka samaaegsete usalduspiiride leidmiseks (st piirkonna leidmiseks, mis mõlemale parameetri/lineaarkombinatsiooni väärtusele saab pihta etteantud tõenäosusega). Nimelt

$$\begin{aligned}
&\left(\mathbf{\Lambda}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{\Lambda}\boldsymbol{\beta}\right)^T\left(\mathbf{\Lambda}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^-\mathbf{\Lambda}^T \cdot \mathrm{MSE}\right)^{-1}\left(\mathbf{\Lambda}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{\Lambda}\boldsymbol{\beta}\right)/\mathrm{rank}(\mathbf{\Lambda}) \sim \\
&\qquad\qquad \sim F_{\mathrm{df}_1=\mathrm{rank}(\mathbf{\Lambda});\mathrm{df}_2=n-\mathrm{rank}(\mathbf{X})}
\end{aligned}$$

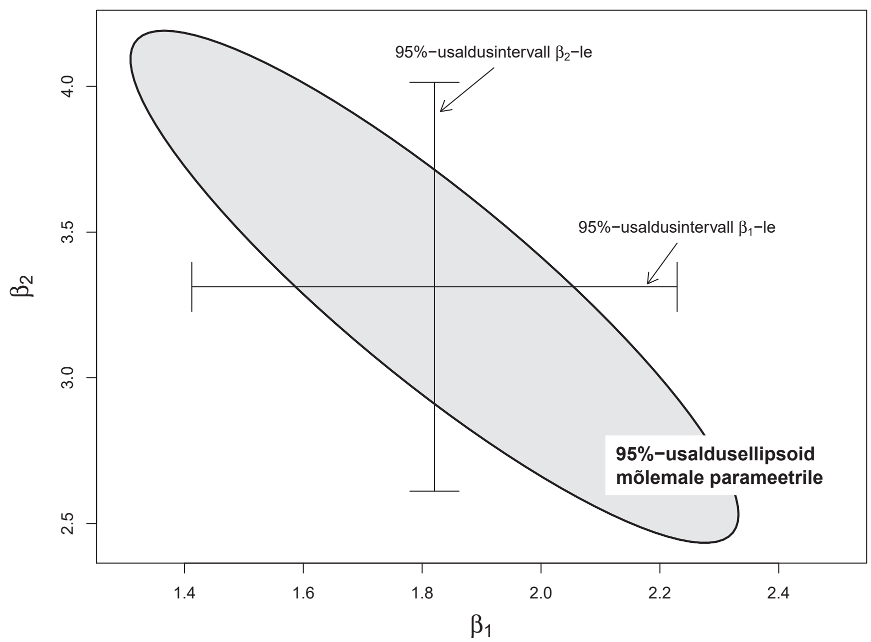
ja seega saame $1-\alpha$-usalduspiirkonna, kui valime usalduspiirkonda (ellipsi) kuuluvaks kõik need $\mathbf{\Lambda}^T\boldsymbol{\beta}$ väärtused, mille korral

$$\left(\mathbf{\Lambda}\hat{\boldsymbol{\beta}}-\mathbf{\Lambda}\boldsymbol{\beta}\right)^T\left(\mathbf{\Lambda}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^-\mathbf{\Lambda}^T\cdot\mathrm{MSE}\right)^{-1}\left(\mathbf{\Lambda}\hat{\boldsymbol{\beta}}-\mathbf{\Lambda}\boldsymbol{\beta}\right)/\mathrm{rank}(\mathbf{\Lambda})\leq$$
$$\leq f_{1-\alpha;\mathrm{df}_1=\mathrm{rank}(\mathbf{\Lambda});\mathrm{df}_2=n-\mathrm{rank}(\mathbf{X})},$$

kus $f_{1-\alpha;\mathrm{df}_1=\mathrm{rank}(\mathbf{\Lambda});\mathrm{df}_2=n-\mathrm{rank}(\mathbf{X})}$ on F-jaotuse $1-\alpha$ kvantiil.

Usaldusellipsi ja tavaliste ühele parameetrile/lineaarkombinatsioonile tehtud usaldusintervallide seost illustreerib joonis 4.1.

Joonis 4.1: 95%-Usaldusellipsoid parameetritele ja 95%-usaldusintervallid



Ülesanne

Hinnatakse mudelit $y_{ij}=\mu_i+\varepsilon_{ij}$, $i=1{,}2$; $j=1\ldots n_i$. Pane kirja, milline näeb välja 95%-usaldusellipsi valem! Soovituslik: illustreeri saadud usaldusellipsit joonise abil!