6.2 Tukey meetod

Tukey meetodit tuntakse ka Tukey HSD (Honestly Significant Difference) meetodina.

Olgu antud t sõltumatut sama hajuvusega normaaljaotusega juhuslikku suurust, $Y_i \sim N(\mu; \sigma^2)$. Lisaks eeldame, et on olemas neist t vaatlusest sõltumatu hinnang dispersioonile (S^2):

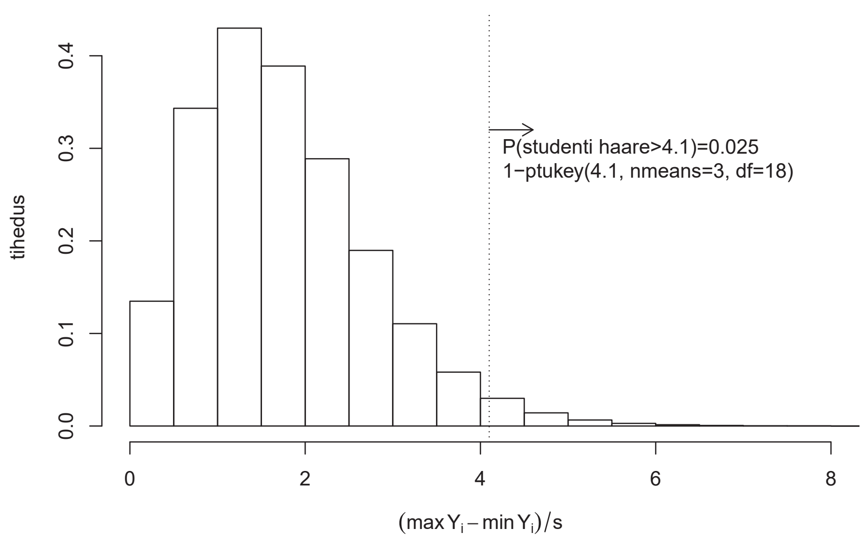
$$\frac{df \cdot S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{df}; \qquad S^2 \perp Y_i.$$

Tukey't huvitas, kui kaugele teineteisest võivad üksikvaatlused sattuda (mõõdetuna standardhälbe ühikutes). Ta kirjeldas ära juhusliku suuruse

$$Q := \frac{\max Y_i - \min Y_i}{S}$$

jaotuse. Kahest parameetrist (t ja df) sõltuvat jaotust tuntakse Studenti haardejaotuse („*The Studentized Range Distribution*") nime all, vaata ka joonist 6.2.

Joonis 6.2: Studenti haardejaotus, t=3; df=18



Kuidas Studenti haardejaotust kasutada? Soovime näiteks võrrelda kolme populatsiooni keskväärtuseid. Igast populatsioonist olgu meil tehtud 7 vaatlust. Eeldame, et uuritava tunnuse hajuvus on kõigis populatsioonides samasugune, σ^2. Valimikeskmiste jaotus on sellisel juhul normaaljaotus (vähemalt ligikaudselt),

$$\overline{Y}_{i.} \sim N(\mu_i; \sigma^2/7).$$

Samuti on meie käsutuses valimikeskmistest sõltumatu hinnang vaatluste dispersioonile, MSE (vabadusastmete arvuga $n - p = n - \text{rank}(\mathbf{X}) = 7 \cdot 3 - 3 = 18$), ja valimikeskmiste dispersioonile (MSE/7). Juhul, kui keskväärtused oleksid kõigis uuritavates populatsioonides samad, oleks valimikeskmiste maksimaalne erinevus jagatud $\sqrt{MSE/7}$-ga järelikult Studenti haardejaotusega juhuslik suurus.

Olgu kolme valimi keskmised järgmised: $\overline{Y}_{1.} = 14{,}2; \overline{Y}_{2.} = 6; \overline{Y}_{3.} = 6{,}2$. Nihketa hinnang jääkide dispersioonile olgu MSE=28. Studenti haare on seega $(14{,}2 - 6)/\sqrt{MSE/7} = 4{,}1$ Kuna standardiseeritud erinevus keskmiste vahel on väga suur — sedavõrd suurt või veel suuremat maksimaalset erinevust kolme valimi keskmiste vahel näeksime nullhüpoteesi kehtides (keskväärtused pole erinevad) kõigest tõenäosusega 0,025 (vaata joonist 6.2), siis loeme esimese ja teise populatsiooni keskväärtused tõestatavalt erinevaks. Võrreldes 1. ja 3. populatsiooni saame Studenti haardeks 4 — sedavõrd suur maksimaalne võimalik erinevus keskmiste vahel esineks nullhüpoteesi kehtides kõigest tõenäosusega 0,028 — seega saame ka 1. ja 3. populatsiooni keskväärtused erinevateks lugeda. Märkus: R'is saab Studenti haardejaotuse kvantiile ja jaotusfunktsiooni väärtust leida funktsioonide `qtukey` ja `ptukey` abil.

Proovime esitatud arutluskäigu kirja panna veidi üldisemal kujul. Oletame, et igal faktori tasemel (näiteks igas maakonnas) on tehtud k vaatlust, uuritaval faktoril oli kokku t erinevat taset (t erinevat maakonda). Kuna vaatluseid on igal faktori tasemel tehtud sama arv, siis on ka kõigi gruppide keskmised sama dispersiooniga, σ^2/k. Järelikult

$$\frac{\max_i \overline{Y}_{i.} - \min_j \overline{Y}_{j.}}{\sqrt{MSE/k}} \sim Q(t; k \cdot t - t).$$

Kuna $\max_i \overline{Y}_{i.} - \min_j \overline{Y}_{j.} \geq |\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{j.}| \, \forall i, j$ siis

$$P\left(\bigcap_{i,j} \left\{ \frac{|\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{j.}|}{\sqrt{MSE/k}} \leq Q_{1-\alpha;t;k\cdot t-t} \right\}\right) = 1 - \alpha.$$

kus $Q_{1-\alpha;t;k\cdot t-t}$ tähistab parameetritega t ja $k \cdot t - t$ Studenti haardejaotuse $1-\alpha$-kvantiili. Vabadusastmete arv $k \cdot t - t$ on antud näites dispersioonihinnangu (MSE) vabadusaastmete arv (meil enamasti varem esitatud kui $n - p$).

Seega kui loeme i. ja j. grupi keskväärtused erinevateks, kui

$$|\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{j.}| > \sqrt{MSE/k} \cdot Q_{1-\alpha;t;n-p},$$

siis võime olla kindlad, et I-liiki viga ei tehta kõigi võrdluste peale kokku suurema tõenäosusega kui α.

Muuseas, F-testi järgi vajadus puudub: me võime teha otse kõigi gruppide omavahelised võrdlused Tukey meetodil. Saame olla kindlad, et kõigi oluliseks loetud tulemuste peale kokku me ei tee I-liiki viga suurema tõenäosusega kui α. Kui leiame erinevuse — tore. Kui ei leia erinevust — no siis pole midagi teha. Tõestatavaid erinevusi siis lihtsalt pole. Aga milleks meile siis veel F-test? Ehk Tukey meetod pakub ahvatlevat alternatiivi F-testile — tema eeliseks on see, et kummutades nullhüpoteesi on kohe ka võimalik öelda, millised keskväärtused siis pole võrdsed (erinevalt F-testist, mis piirdub märksa ebamäärasema tulemusega: leidub teineteisest erinevaid keskväärtuseid).

Paraku eeldab Tukey meetod oma algsel kujul, et igal faktori tasemel on tehtud sama arv mõõtmisi (valim peab olema tasakaalustatud, *balanced sample*).

Üheks tasakaalulise andmestiku nõuet leevendavaks meetodiks on Tukey-Kramer'i meetod. Mõistmaks seda, kuidas Tukey meetodit saaks kasutada ka mittetasakaaluliste andmestike korral, kirjutame Tukey meetodi põhiväite veidi teisele kujule:

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcap_{i,j}\left\{|\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{j.}| \le \sqrt{\hat{\sigma}^2/k} \cdot Q_{1-\alpha;t;n-p}\right\}\right) &= 1-\alpha \\
P\left(\bigcap_{i,j}\left\{|\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{j.}| \le \sqrt{2\cdot\hat{\sigma}^2/k} \cdot Q_{1-\alpha;t;n-p}/\sqrt{2}\right\}\right) &= 1-\alpha \\
P\left(\bigcap_{i,j}\left\{|\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{j.}| \le \sqrt{\hat{D}(\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{j.})} \cdot Q_{1-\alpha;t;n-p}/\sqrt{2}\right\}\right) &= 1-\alpha
\end{aligned}$$

Aga suurust $\hat{D}(\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{j.})$ oskame ju kergesti arvutada ka siis, kui valimite suurused pole samasuured: $\hat{D}(\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{j.}) = \hat{\sigma}^2/n_i + \hat{\sigma}^2/n_j$. Tukey-Kramer'i meetodi puhul loetaksegi i. ja j. grupi keskväärtused statistiliselt oluliselt erinevateks, kui

$$\overline{Y}_{i.} - \overline{Y}_{j.} > \sqrt{\hat{\sigma}^2(1/n_i + 1/n_j)} \cdot Q_{1-\alpha;t;n-p}/\sqrt{2}.$$

Tukey-Kramer'i meetod on suuresti ebateaduslik meetod, aga töötab praktikas hästi. Selle meetodi abiga saadud testid või usaldusintervallid võivad olla liiga konservatiivsed, kui eri gruppides on mõõdetud kümneid kordi erinev arv vaatluseid, aga antud meetod ei tee kunagi I-liiki viga suurema tõenäosusega kui lubatud (vt Hayter, 1984). Kui Tukey-Krameri meetodi abil õnnestub tõestada keskväärtuste erinevus, siis võime olla kindlad, et me pole teinud I-liiki viga suurema tõenäosusega kui lubasime.

Kui suur see liigne konservatiivsus siis on? Kui võrdleme kolme grupi keskväärtuseid, $n_1 = 100, n_2 = 10, n_3 = 10$ (ehk gruppide suurused erinevad 10 korda), ja kasutame olulisuse nivood $\alpha = 0{,}05$, siis nullhüpoteesi kehtides (kõik keskväärtused on tegelikult võrdsed) on Tukey-Krameri meetodi tegelik I-liiki vea tegemise tõenäosus 0,048. Ehkki tulemus on väiksem kui 0,05, on erinevus siiski väga väike ja enamasti praktiliste üleannete lahendamisel ignoreeritav.

6.3 Mitmemõõtmelisel t-jaotusel baseeruvad testid

Tukey meetod on täpne tasakaalulise andmestiku korral. Mittetasakaalulise andmestiku või keerukamate hüpoteeside korral tuleb hea lahenduse leidmiseks otsida uudset lähenemisviisi. Alustame oma otsinguid ühe lihtsa näitega.

Vaatame kahe tasemega faktrotunnust sisaldavat dispersioonanalüüsi mudelit:

$$Y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}; \;\; i = 1{,}2; j = 1, \dots, n,$$

ehk $Y = X\beta + \varepsilon$, kus $\beta^T = (\mu_1; \mu_2)$. Keskmiste vahe oleks sellises mudelis $\lambda^T\hat{\beta}$, kus $\lambda^T = (1; -1)$. Juhul kui keskväärtused ei erine üksteisest, siis $\lambda^T\beta = 0$. Sellisel erijuhul võime Tukey väite kirja panna järgmisel kujul: tõenäosusega $1 - \alpha$ jääb valimikeskmiste erinevus (nullhüpoteesi kehtides - keskväärtused ei erine) vahemikku

$$\begin{aligned}
-Q_{1-\alpha;2;2n-2} \leq &\quad \frac{\lambda^T\hat{\beta}}{\sqrt{MSE/n}} &\leq Q_{1-\alpha;2;2n-2} \\
-Q_{1-\alpha;2;2n-2} \leq &\quad \frac{\lambda^T\hat{\beta} - \lambda^T\beta}{\sqrt{\widehat{D(\lambda^T\hat{\beta})}}/\sqrt{2}} &\leq Q_{1-\alpha;2;2n-2} \\
-Q_{1-\alpha;2;2n-2}/\sqrt{2} \leq &\quad \frac{\lambda^T\hat{\beta} - \lambda^T\beta}{\sqrt{\widehat{D(\lambda^T\hat{\beta})}}} &\leq Q_{1-\alpha;2;2n-2}/\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Kuna nullhüpoteesi kehtides on võrratuse keskmine osa t-jaotusega, saame siit ühe seose Studenti haardejaotuse ja t-jaotuse kvantiilide kohta: $Q_{1-\alpha;2;df}/\sqrt{2} =$

$t_{1-\alpha/2;df}$. Paneme tähele, et 2 valimi korral on t-jaotusel baseeruv hüpoteeside kontrollimine märksa mugavam võrreldes Tukey haardejaotuse kasutamisega — pole piiranguid valimimahule, lubatud on keerukamad hüpoteesid (me ei pea piirduma vaid kahe grupi keskväärtuste võrdlemisega, vaid võime küsida ka keerukamaid küsimusi). Takistuseks on vaid asjaolu, et me justnagu ei saaks küsida samaaegselt rohkem kui ühte küsimust — saame korraga teostada vaid ühe keskväärtuste võrdluse.

Kuidas suudaksime t-testi alla mahutada näiteks kolme keskväärtuse samaaegsed võrdlused? Appi tuleb võtta mitmemõõtmeline t-jaotus.

Defineerime esmalt mitmemõõtmelise t-jaotuse.

Olgu $\mathbf{y}$ d-mõõtmelise normaaljaotusega juhuslik suurus, $\mathbf{y} \sim N_d(\mathbf{0}; \mathbf{\Sigma})$. Olgu antud ka vektorist $\mathbf{y}$ sõltumatu hii-ruut jaotusega juhuslik suurus $Z \sim \chi^2_{df}$.

Siis $\mathbf{x} := \frac{\mathbf{y}}{\sqrt{Z/df}}$ on d-mõõtmelise t-jaotusega (vabadusastmete arvuga df ja kovariatsioonimaatriksiga $\mathbf{\Sigma}$) juhuslik suurus,

$$\mathbf{x} \sim t_d(df; \mathbf{\Sigma}).$$

Defineerime hüperkuubi mille külje pikkuseks on $2c$:

$$hkuup(c) := \{\mathbf{x} = (x_1; \ldots; x_d)^T | -c \leq x_i \leq c\}.$$

Järgnevalt valime konstandi c väärtuse selliselt, et mitmemõõtmelise t-jaotusega juhuslik suurus $\mathbf{x} \sim t_d(df; \mathbf{\Sigma})$ satuks hüperkuupi tõenäosusega $1 - \alpha$:

$$P\left(\mathbf{x} \in hkuup(c)\right) = 1 - \alpha.$$

Näiteks ühemõõtmelise (Studenti) t-jaotuse korral rahuldab ülaltoodud tingimust valik $c = t_{1-\alpha/2;df}$. Üldjuhul võime kasutada konstandi c leidmiseks mõnda arvutiprogrammi — näiteks R-is saab soovitud konstante leida lisamoodulis `mvtnorm` paikneva funktsiooni `qmvt` abil.

Kuidas kasutada mitmemõõtmelist t-jaotust ja leitud konstanti c mitmese testimise probleemi lahendamisel?

Olgu antud hinnatavad parameetrite lineaarkombinatsioonid $\boldsymbol{\lambda}_1^T\boldsymbol{\beta}; \ldots; \boldsymbol{\lambda}_k^T\boldsymbol{\beta}$. Soovime leida neile lineaarkombinatsioonidele ühiseid usaldusvahemikke — selliseid vahemikke, millesse kõigi nende lineaarkombinatsioonide tegelikud väärtused jäävad tõenäosusega $1 - \alpha$.

Moodustame lineaarkombinatsioonidest maatriksi $\mathbf{\Lambda} = (\boldsymbol{\lambda}_1 | \ldots | \boldsymbol{\lambda}_k)$. Märkame, et

$$\mathbf{\Lambda}^T \left(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}\right) \sim N(0; \sigma^2 \mathbf{\Lambda}^T (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^- \mathbf{\Lambda}).$$

Järgnevalt korrutame vektori $\mathbf{\Lambda}^T(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})$ läbi diagonaalmaatriksiga $\mathbf{M}$ mille diagonaalil on suurused $\frac{1}{\sqrt{\mathrm{D}(\boldsymbol{\lambda}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}})}}$:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{\lambda}_1^T(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^- \boldsymbol{\lambda}_1 \sigma^2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{\lambda}_k^T(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^- \boldsymbol{\lambda}_k \sigma^2}} \end{pmatrix}.$$

Ka vektor $\mathbf{M\Lambda}^T(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})$ on k-mõõtmelise normaaljaotusega juhuslik suurus,

$$\mathbf{M\Lambda}^T(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) \sim N\left(0; \mathbf{M}\mathrm{D}(\mathbf{\Lambda}^T\hat{\boldsymbol{\beta}})\mathbf{M}^T\right),$$

ja sobib mitmemõõtmelise t-jaotuse definitsioonis vektori $\mathbf{y}$ rolli (muuseas, osad mitmemõõtmelise t-jaotuse definitsioonid nõuavad, et juhusliku vektori $\mathbf{y}$ kovariatsioonimaatriksi $\mathbf{\Sigma}$ diagonaalil oleksid ühed. Antud vektor rahuldab ka seda nõuet, kõigi elementide dispersioonid on võrdsed ühega).

Juhusliku suuruse Z osasse sobib aga suurepäraselt juhuslik suurus $(n - p)MSE/\sigma^2 \sim \chi^2_{df=n-p}$, kus $p = \mathrm{rank}(\mathbf{X})$. Seega on definitsiooni kohaselt

$$\mathbf{M\Lambda}^T(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})/\sqrt{MSE/\sigma^2} \sim t_k(n - p; \mathbf{M}\mathrm{D}(\mathbf{\Lambda}^T\hat{\boldsymbol{\beta}})\mathbf{M}^T).$$

Konstrueeritud k-mõõtmelise t-jaotusega vektori i. element

$$\frac{\boldsymbol{\lambda}_i^T\left(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}\right)}{\sqrt{\boldsymbol{\lambda}_i^T(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^- \boldsymbol{\lambda}_i MSE}},$$

ei sõltu tundmatust parameetrist σ (küll aga on tundmatu parameetri $\boldsymbol{\beta}$ funktsioon).

Samuti võime veenduda, et kovariatsioonimaatriks $\mathbf{M}\mathrm{D}(\mathbf{\Lambda}^T\hat{\boldsymbol{\beta}})\mathbf{M}^T$ ei sisalda tundmatuid parameetreid — sest σ^2 esineb nii maatriksis $\mathrm{D}(\mathbf{\Lambda}^T\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \sigma^2\mathbf{\Lambda}^T(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^-\boldsymbol{\lambda}^T$ kui ka maatriksis $\mathbf{M}$ ja taandub välja.

Saadud tulemust saame kasutada ühiste usaldusvahemike konstrueerimiseks. Kuna

$$P\left(\frac{\mathbf{M\Lambda}^T(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})}{\sqrt{MSE/\sigma^2}} \in hkuup(c)\right) = 1 - \alpha$$

siis järelikult

$$P\left(\bigcap_{i=1,\ldots,k}\left\{-c \leq \frac{\boldsymbol{\lambda}_i^T\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\lambda}_i^T\boldsymbol{\beta}}{\sqrt{\boldsymbol{\lambda}_i^T(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^-\boldsymbol{\lambda}_i MSE}} \leq c\right\}\right) = 1-\alpha \tag{6.4}$$

$$P\left(\bigcap_{i=1,\ldots,k}\left\{-\boldsymbol{\lambda}_i^T\hat{\boldsymbol{\beta}} - c\cdot\sqrt{\boldsymbol{\lambda}_i^T(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^-\boldsymbol{\lambda}_i MSE} \leq -\boldsymbol{\lambda}_i^T\boldsymbol{\beta} \leq \right.\right.$$
$$\left.\left. \leq -\boldsymbol{\lambda}_i^T\hat{\boldsymbol{\beta}} + c\cdot\sqrt{\boldsymbol{\lambda}_i^T(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^-\boldsymbol{\lambda}_i MSE}\right\}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\bigcap_{i=1,\ldots,k}\left\{\boldsymbol{\lambda}_i^T\hat{\boldsymbol{\beta}} + c\cdot\sqrt{\boldsymbol{\lambda}_i^T(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^-\boldsymbol{\lambda}_i MSE} \geq \boldsymbol{\lambda}_i^T\boldsymbol{\beta} \geq \right.\right.$$
$$\left.\left. \geq \boldsymbol{\lambda}_i^T\hat{\boldsymbol{\beta}} - c\cdot\sqrt{\boldsymbol{\lambda}_i^T(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^-\boldsymbol{\lambda}_i MSE}\right\}\right) = 1-\alpha$$

Saadud tulemust saab kasutada ka hüpoteeside mitmese testimise juures. Tahame garanteerida, et kõigi k hüpoteesi

$$H_0 : \boldsymbol{\lambda}_1^T\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\lambda}_1^T\boldsymbol{\beta}_0; \ldots; H_0 : \boldsymbol{\lambda}_k^T\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\lambda}_k^T\boldsymbol{\beta}_0$$

peale kokku ei tekiks I-liiki viga suurema tõenäosusega kui α. Kui võtame alternatiivse hüpoteesi vastu vaid siis, kui vastav t-statistik jääb väljapoole lõiku $[-c\ldots c]$, siis ei saa me I-liiki viga teha suurema tõenäosusega kui α, sest võrdusest 6.4 järeldub

$$P\left(\bigcap_{i\in\mathcal{H}_0}\left\{-c \leq \frac{\boldsymbol{\lambda}_i^T\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\lambda}_i^T\boldsymbol{\beta}_0}{\sqrt{\boldsymbol{\lambda}_i^T(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^-\boldsymbol{\lambda}_i MSE}} \leq c\right\}\right) \geq 1-\alpha$$
$$P\left(\bigcup_{i\in\mathcal{H}_0}\left\{\frac{\boldsymbol{\lambda}_i^T\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\lambda}_i^T\boldsymbol{\beta}_0}{\sqrt{\boldsymbol{\lambda}_i^T(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^-\boldsymbol{\lambda}_i MSE}} \notin [-c\ldots c]\right\}\right) < \alpha,$$

kus $\mathcal{H}_0$ tähistab nende indeksite i hulka, mille korral nullhüpotees $H_0 : \boldsymbol{\lambda}_i^T\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\lambda}_i^T\boldsymbol{\beta}_0$ kehtib.

6.3.1 Märkused

Tasakaalulise andmestiku korral langevad mitmemõõtmelisel t-jaotusel baseeruvad otsused kokku Tukey-meetodi otsustega (juhul, kui meid huvitavad kõikvõimalike gruppide keskväärtuste omavahelised võrdlused).

Tehes palju teste (võrreldes kõiki faktortunnuse nivoosid omavahel vms) soovime enamasti tagada, et kõigi tehtud võrdluste peale kokku (eksperimendi peale kokku) me I-liiki viga ei tee suurema tõenäosusega kui meie poolt valitud α. Nii Bonferroni, Tukey (üldjuhul mitmemõõtmelist t-jaotust kasutav variant) kui ka Scheffé meetod kontrollivad eksperimendi käigus I-liiki vea tekkimise tõenäosust, ükskõik, kas nullhüpotees kehtib vaid osaliselt (osade testitavate võrdluste puhul) või täielikult (inglise keeles: *controls the maximum familywise error rate attainable under any complete or partial null hypothesis*). Juhul, kui meid huvitab vaid paar ettemääratavat testi (näiteks kõikvõimalike grupikeskmiste omavaheline võrdlemine), on vaadeldud meetodite seast kõige võimsamaks mitmese testimise meetodiks mitmemõõtmelist t-jaotust kasutav meetod.

Lisaks on mõningaid kirjeldatud meetodeid võimalik kombineerida nn *step-down* või *step-up* meetoditega (mis arvestavad võimalusega, et mitte kõigi testitavate hüpoteeside korral ei pruugi kehtida nullhüpotees). Näiteks Bonferroni meetodit on võimalik kombineerida *step-down* protseduuri-ideega ja saada Bonferron-Holmi meetod, mis on võimsam kui Bonferroni meetod (Bonferron-Holmi meetodi võimsus ei ole kunagi väiksem kui Bonferroni meetodi oma). Bonferron-Holmi meetod on sageli isegi suurema võimsusega kui Tukey või mitmemõõtmelisel t-jaotusel põhinev meetod. Samas on võimalik ka Tukey meetodit *step-down* või *step-up* ideedest lähtuvalt modifitseerida ja jõuda meetoditeni, mille võimsus on jälle omakorda Bonferron-Holmi meetodist parem. Näiteks Ryan-Einot-Gabriel-Welsch'i (REGW) test, mille saame Tukey-meetodi täiendamisel *step-down*-meetodi alusel. Samas nimetatud meetodi implementatsioonid tarkvaras teevad sageli täiendavaid eelduseid (näiteks sama arv vaatluseid igast grupist).

6.4 Ülesanne

Üritatakse aretada uut õlirikkamat ja saagirohkemat rapsi. Aretajad on välja tulnud 20 uue aretisega ja soovitakse näha, kas mõni neist aretistest viib ka tegelikult suuremat õlitoodanguni. Igat aretist kasvatatakse kolmel juhuslikult valitud põllul (kokku osaleb uuringus seega $20 \cdot 3 = 60$ põldu). Iga põllu korral mõõdetakse saadud rapsiõli kogus (hektari kohta). Rapsiõli tulemuste loomulik varieeruvus põldude vahel on varasemate uuringute põhjal $s = 200$ (leitud kasutades andmeid 100 juhuslikult valitud põllu varasema õlitoodangu põhjal). Aretaja soovib teada, kui suurest saagikuste erinevusest alates on erinevus ka statistiliselt oluline (nii, et kõigi võrdluste peale kokku esimest liiki viga ei oleks suurem kui 0,05). Leia statistiliselt oluline erinevus (kg õli/ha) kasutades Tukey meetodit!