4.3 F-test hüpoteeside kontrollimiseks mudeli parameetrite kohta

Hinnatava parameeterfunktsiooni $\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{\beta}$ hinnangu jaotuseks (kui vaatlusvektor $\mathbf{y}$ on normaaljaotusega; kehtib ligikaudu ka siis, kui on tegemist suure valimiga...) on normaaljaotus :

$$\boldsymbol{\lambda}^T\hat{\boldsymbol{\beta}} \sim N\left(\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{\beta}; \boldsymbol{\lambda}^T(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^-\boldsymbol{\lambda}\sigma^2\right).$$

Nullhüpoteesi $H_0 : \boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{\beta}_0$ kehtides on seega

$$\frac{\boldsymbol{\lambda}^T\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{\beta}_0}{\sqrt{\boldsymbol{\lambda}^T(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^-\boldsymbol{\lambda}\sigma^2}} \sim N(0;1).$$

ehk

$$\frac{\left(\boldsymbol{\lambda}^T\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{\beta}_0\right)^T\left(\boldsymbol{\lambda}^T\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{\beta}_0\right)}{\boldsymbol{\lambda}^T(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^-\boldsymbol{\lambda}\sigma^2} \sim \chi^2_{\mathrm{df}=1}.$$

Kuna $\boldsymbol{\lambda}^T\hat{\boldsymbol{\beta}}$ oli sõltumatu MSE'st (vaata peatükki 3), saame:

$$\frac{\left(\boldsymbol{\lambda}^T\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{\beta}_0\right)^T\left(\boldsymbol{\lambda}^T\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{\beta}_0\right)}{\boldsymbol{\lambda}^T(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^-\boldsymbol{\lambda}\cdot MSE} \overset{H_0}{\sim} F_{\mathrm{df}_1=1;\mathrm{df}_2=n-\mathrm{rank}(\mathbf{X})}.$$

F-testi kasutav lähenemisviis on mugavam, kui soovime kontrollida mitut küsimust samaaegselt. Näiteks tahame teada, kas samaaegselt kehtivad väited $\boldsymbol{\lambda}_1{}^T\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\lambda}_1{}^T\boldsymbol{\beta}_0$ ja $\boldsymbol{\lambda}_2{}^T\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\lambda}_2{}^T\boldsymbol{\beta}_0$. Sellisel juhul võime moodustada maatriksi $\boldsymbol{\Lambda}^T$ pannes üksteise peale vektorid $\boldsymbol{\lambda}_1{}^T$ ja $\boldsymbol{\lambda}_2{}^T$. Nullhüpoteesi kehtides oleks siis

$$\boldsymbol{\Lambda}^T\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\Lambda}^T\boldsymbol{\beta}_0 \overset{H_0}{\sim} N\left(0; \boldsymbol{\Lambda}^T(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^-\boldsymbol{\Lambda}\sigma^2\right).$$

Olgu maatriks $\mathbf{M}$ mingi sümmeetriline positiivselt määratud reaalaruliste väärtustega maatriks spektraallahutusega $\mathbf{ODO}^T$ (kus $\mathbf{O}$ on omavektorite ortogonaalne maatriks, $\mathbf{O}^T\mathbf{O} = \mathbf{I}$, ja $\mathbf{D}$ on diagonaalmaatriks mille peadiagonaalil on maatriksi $\mathbf{M}$ omaväärtused λ_i). siis võime leida maatriksid $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{OD}^{-1}\mathbf{O}^T$, $\mathbf{M}^{1/2} = \mathbf{OD}^{1/2}\mathbf{O}^T$ ja $\mathbf{M}^{-1/2} = \mathbf{OD}^{-1/2}\mathbf{O}^T$, kus maatriksid $\mathbf{D}^{-1}$, $\mathbf{D}^{1/2}$ ja $\mathbf{D}^{-1/2}$ on diagonaalmaatriksid mille diagonaali elementideks on vastavalt λ_i^{-1}, $\lambda_i^{1/2}$ ja $\lambda_i^{-1/2}$. Kuna eeldasime, et maatriks $\mathbf{M}$ on positiivselt määratud, siis on ka kõik tema omaväärtused positiivsed $\lambda_i > 0, \forall i$, ja järelikult defineeritud maatriksid antud tingimuste kehtides ka eksisteerivad. On lihtne näha, et

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{M} = \mathbf{O}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{O}^T \cdot \mathbf{O}\mathbf{D}\mathbf{O}^T = \mathbf{O}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{O}^T = \mathbf{I};$$

$$\mathbf{M}^{1/2}\mathbf{M}^{1/2} = \mathbf{O}\mathbf{D}^{1/2}\mathbf{O}^T \cdot \mathbf{O}\mathbf{D}^{1/2}\mathbf{O}^T = \mathbf{O}\mathbf{D}\mathbf{O}^T = \mathbf{M};$$

$$\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{M}^{-1/2} = \mathbf{O}\mathbf{D}^{-1/2}\mathbf{O}^T \cdot \mathbf{O}\mathbf{D}^{-1/2}\mathbf{O}^T = \mathbf{O}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{O}^T = \mathbf{M}^{-1}.$$

Märkus: Maatriksid $\mathbf{M}^{1/2}$ ja $\mathbf{M}^{-1/2}$ pole ainsad sellised maatriksid, mille korrutamisel iseendaga saadakse tulemuseks vastavalt $\mathbf{M}$ ja $\mathbf{M}^{-1}$.

Kuna kovariatsioonimaatriks $\mathbf{\Lambda}^T(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^-\mathbf{\Lambda}\sigma^2$ on positiivselt määratud, siis võime ülalkirjeldatud viisil moodustada ka maatriksi $\left(\mathbf{\Lambda}^T(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^-\mathbf{\Lambda}\sigma^2\right)^{-1/2}$ ja

$$\left(\mathbf{\Lambda}^T(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^-\mathbf{\Lambda}\sigma^2\right)^{-1/2}\left(\mathbf{\Lambda}^T\hat{\boldsymbol\beta} - \mathbf{\Lambda}^T\boldsymbol\beta_0\right) \overset{H_0}{\sim} N(0;\mathbf{I})$$

ning

$$\left(\mathbf{\Lambda}^T\hat{\boldsymbol\beta} - \mathbf{\Lambda}^T\boldsymbol\beta_0\right)^T\left(\mathbf{\Lambda}^T(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^-\mathbf{\Lambda}\sigma^2\right)^{-1}\left(\mathbf{\Lambda}^T\hat{\boldsymbol\beta} - \mathbf{\Lambda}^T\boldsymbol\beta_0\right) \overset{H_0}{\sim} \chi^2_{\mathrm{df}=\mathrm{rank}(\mathbf{\Lambda})}.$$

Teisalt teame (3.1), et

$$(n - \mathrm{rank}(\mathbf{X})) \cdot MSE/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-\mathrm{rank}(\mathbf{X})}.$$

Mõlemat hii-ruut jaotusega juhuslikku suurust kasutades saame konstrueerida F-jaotusega juhusliku suuruse, mida saab kasutada meid huvitava hüpoteesipaari (hüpoteeside komplekti) testimiseks:

$$\left(\mathbf{\Lambda}^T\hat{\boldsymbol\beta} - \mathbf{\Lambda}^T\boldsymbol\beta_0\right)^T\left(\mathbf{\Lambda}^T(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^-\mathbf{\Lambda}\cdot\mathrm{MSE}\right)^{-1}\left(\mathbf{\Lambda}^T\hat{\boldsymbol\beta} - \mathbf{\Lambda}^T\boldsymbol\beta_0\right)/\mathrm{rank}(\mathbf{\Lambda}) \overset{H_0}{\sim}$$
$$\overset{H_0}{\sim} F_{\mathrm{df}_1=\mathrm{rank}(\mathbf{\Lambda});\mathrm{df}_2=n-\mathrm{rank}(\mathbf{X})}.$$

Sama tulemust saab kasutada ka samaaegsete usalduspiiride leidmiseks (st piirkonna leidmiseks, mis mõlemale parameetri/lineaarkombinatsiooni väärtusele saab pihta etteantud tõenäosusega). Nimelt

$$\left(\mathbf{\Lambda}^T\hat{\boldsymbol\beta} - \mathbf{\Lambda}^T\boldsymbol\beta\right)^T\left(\mathbf{\Lambda}^T(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^-\mathbf{\Lambda}\cdot\mathrm{MSE}\right)^{-1}\left(\mathbf{\Lambda}^T\hat{\boldsymbol\beta} - \mathbf{\Lambda}^T\boldsymbol\beta\right)/\mathrm{rank}(\mathbf{\Lambda}) \sim$$
$$\sim F_{\mathrm{df}_1=\mathrm{rank}(\mathbf{\Lambda});\mathrm{df}_2=n-\mathrm{rank}(\mathbf{X})}$$

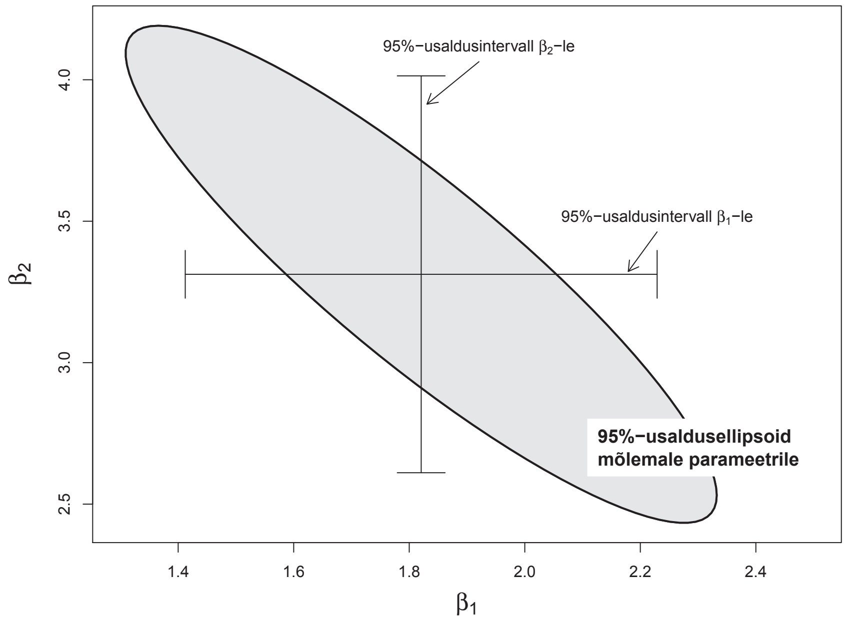
ja seega saame $1-\alpha$-usalduspiirkonna, kui valime usalduspiirkonda (ellipsi) kuuluvaks kõik need $\mathbf{\Lambda}^T\boldsymbol{\beta}$ väärtused, mille korral

$$\left(\mathbf{\Lambda}^T\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{\Lambda}^T\boldsymbol{\beta}\right)^T \left(\mathbf{\Lambda}^T(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^-\mathbf{\Lambda}\cdot \mathrm{MSE}\right)^{-1} \left(\mathbf{\Lambda}^T\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{\Lambda}^T\boldsymbol{\beta}\right)/\mathrm{rank}(\mathbf{\Lambda}) \leq$$
$$\leq f_{1-\alpha;\mathrm{df}_1=\mathrm{rank}(\mathbf{\Lambda});\mathrm{df}_2=n-\mathrm{rank}(\mathbf{X})},$$

kus $f_{1-\alpha;\mathrm{df}_1=\mathrm{rank}(\mathbf{\Lambda});\mathrm{df}_2=n-\mathrm{rank}(\mathbf{X})}$ on F-jaotuse $1-\alpha$ kvantiil.

Usaldusellipsi ja tavaliste ühele parameetrile/lineaarkombinatsioonile tehtud usaldusintervallide seost illustreerib joonis 4.1.

Joonis 4.1: 95%-Usaldusellipsoid parameetritele ja 95%-usaldusintervallid



Ülesanne

Hinnatakse mudelit $y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}$, $i = 1{,}2$; $j = 1 \ldots n_i$. Pane kirja, milline näeb välja 95%-usaldusellipsi valem! Soovituslik: illustreeri saadud usaldusellipsit joonise abil!