10. loeng: Hinnangu standardvea leidmise meetodeid

November 2, 2020

Kasutatud Natalja Lepiku slaide

Meeldetuletuseks

Eristame: punkthinnang tundmatule parameetrile θ on valimivaatluste põhjal leitud arv $\hat{\theta}$, millele vastab hinnangufunktsioon (ehk arvutuseeskiri) $\hat{\boldsymbol{\theta}}$.

Parameetri hindamiseks võime pakkuda mitu erinevat eeskirja (näiteks aritmeetiline keskmine ja mediaan).

See, kui hea on hinnang, on määratud hinnangufunktsiooni jaotusega. Jaotuse abil saame uurida **hinnangu omadusi**:

- Hinnang on nihketa, kui kehtib $E\hat{\boldsymbol{\theta}} = \theta$. Siinjuures on $B = E\hat{\boldsymbol{\theta}} - \theta$ hinnangu nihe.
- Hinnangu ruutkeskmine viga on $MSE(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = E(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \theta)^2 (= D\hat{\boldsymbol{\theta}} + B^2)$.
- Hinnang on mõjus, kui $\lim_{n\to\infty} MSE(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = 0$.
- Nihketa hinnang $\hat{\theta}_1$ on efektiivsem kui nihketa hinnang $\hat{\theta}_2$ kui kehtib $D\hat{\boldsymbol{\theta}}_1 \leq D\hat{\boldsymbol{\theta}}_2$ (range võrratus peab kehtima vähemalt ühe parameetri võimaliku väärtuse koral.)

Taasvaliku meetodid standardvea leidmiseks (1)

Parameetriline bootstrap

Olgu valimi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kohta teada, et see on pärit jaotusest $F(\theta)$, kus θ on tundmatu.

Valimi põhjal leitakse hinnang $\hat{\theta}$, näiteks $\hat{\theta} = 27{,}96$ (1. näites mediaanil põhinev hinnang).

Nüüd kasutades arvutit genereerime bootstrap valimeid jaotusest $F(27{,}96)$ sama mahuga n ning iga bootstrap valimi põhjal arvutame bootstrap hinnangu $\hat{\theta}^*$:

1. bootstrap valim: $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$, punkhinnang $\hat{\theta}_1^*$
2. bootstrap valim: $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$, punkhinnang $\hat{\theta}_2^*$

...
B. bootstrap valim: $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$, punkhinnang $\hat{\theta}_B^*$.

B on suur (näiteks 1000 ja rohkem).

Taasvaliku meetodid standardvea leidmiseks (2)

Parameetriline bootstrap (jätkub)

Tähistame $\bar{\theta}^* = \sum_{i=1}^{B} \hat{\theta}_i^* / B$ - bootstrap hinnangute keskmine.

Siis hinnangu $\hat{\theta}$ **standardviga bootstrap meetodil** on

$$\sqrt{\hat{D}\hat{\boldsymbol{\theta}}_{BS}} = \sqrt{\frac{1}{B-1} \sum_{i=1}^{B} \left(\hat{\theta}_i^* - \bar{\theta}^* \right)^2}.$$

Taasvaliku meetodid standardvea leidmiseks (3)

Mitteparameetriline bootstrap

Erineb eespool mainitust selle poolest, et me ei kasuta X jaotust F. On olemas valim, mille kohta me ei tea, mis jaotuse klassist see pärit on. Meid huvitab ÜK parameeter θ.

Kasutades arvutit võtame olemasolevast valimist bootstrap valimeid sama mahuga n kasutades lihtsat juhuvalikut tagasipanekuga.

Iga bootstrap valimi põhjal arvutame bootstrap hinnangu $\hat{\theta}^*$.

Hinnangu $\hat{\theta}$ **standardviga** leitakse analoogiliselt eelmise versiooniga,

$$\sqrt{\hat{D}\hat{\boldsymbol{\theta}}_{BS}} = \sqrt{\frac{1}{B-1}\sum_{i=1}^{B}\left(\hat{\theta}_i^* - \bar{\theta}^*\right)^2}.$$

Bootstrap-meetodi rakenduse näide (1)

Normaaljaotusega juhuslike suuruste valim:
24.46,25.61,26.25,26.42,26.66,27.15,27.31,27.54,27.74,27.94,
27.98,28.04,28.28,28.49,28.50,28.87,29.11,29.13,29.50,30.88

Hindame keskväärtust neljal erineval viisil:

$\hat{\mu}_1 = \bar{x} = 27.793$; $\hat{\mu}_2 = (x_{(10)} + x_{(11)})/2 = 27.960$;
$\hat{\mu}_3 = (x_{(1)} + x_{(20)})/2 = 27.670$; $\hat{\mu}_4 = \bar{x}_{karb} = 27.838$.

Hinnangu $\hat{\mu}_1$ standardviga on lihtne leida:
kuna $X_i \sim N(\mu,\sigma)$, $i = 1,...20$, millest $\bar{X} \sim N(\mu,\sigma/\sqrt{20})$

$$\sqrt{\hat{D}\hat{\mu}_1} = \sqrt{\hat{D}\bar{X}} = \hat{\sigma}/\sqrt{20} = 1{,}461/\sqrt{20} = 0{,}327.$$

Teiste hinnangute standardvea leidmine analüütiliselt pole nii triviaalne.
Kasutame siinkohal parameetrilist bootsrapi.

R-i kood $\hat{\mu}_1$ standardvea leidmise kood bootstrap-meetodil:

```
x=c(24.46,25.61,26.25,26.42,26.66,27.15,27.31,27.54,27.74,27.94,27.98,
        28.04,28.28,28.49,28.50,28.87,29.11,29.13,29.50,30.88)

k=10000

# Valimikeskmine:
mu1=mean(x)
bt_mu1=rep(NA,k)
for(i in 1:k){
    valim=rnorm(20,mu1,sd(x))
    bt_mu1[i]=mean(valim)
}
sd(bt_mu1)
```

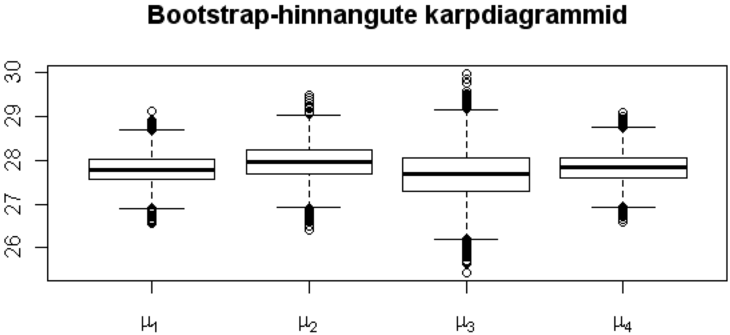
Vastus: 0,328

Hinnangute $\hat{\mu}_2$,$\hat{\mu}_3$ ja $\hat{\mu}_4$ bootstrap-hinnangute leidmiseks võib kasutada vastavalt: `median`, `(min(x)+max(x))/2` ja `mean(x,trim=0.1)`.

Parameetrilise BS-meetodi rakenduse näide (3)

Tulemused:

$$\sqrt{\hat{D}\hat{\mu}_1} = 0{,}328; \quad \sqrt{\hat{D}\hat{\mu}_2} = 0{,}398; \quad \sqrt{\hat{D}\hat{\mu}_3} = 0{,}554; \quad \sqrt{\hat{D}\hat{\mu}_4} = 0{,}334.$$



Mitteparameetrilise BS-meetodi rakenduse näide (1)

R-i kood $\hat{\mu}_1$ standardvea leidmise kood mitteparameetrilisel bootstrap-meetodil:

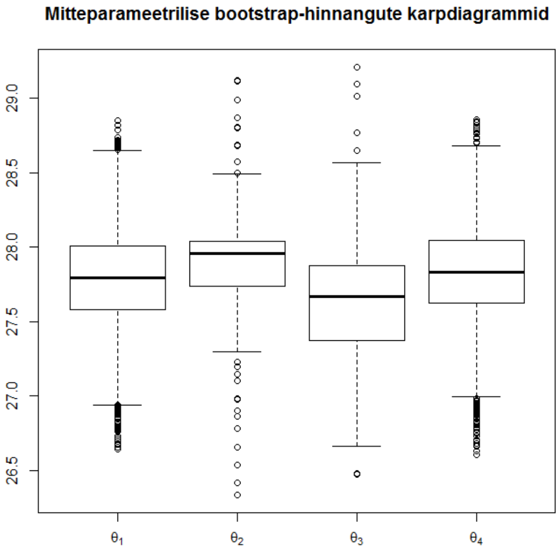
```
x=c(24.46,25.61,26.25,26.42,26.66,27.15,27.31,27.54,27.74,27.94,27.98,
        28.04,28.28,28.49,28.50,28.87,29.11,29.13,29.50,30.88)

k=10000

teeta1=rep(NA,k) #valimikeskmine
teeta2=rep(NA,k) #mediaan
teeta3=rep(NA,k) #(Maximum+Minimum)/2
teeta4=rep(NA,k) #Kärbitud keskmine (2 min ja 2 max elementi on
ära jäetud)

for(i in 1:k){
valim=sample(x, 20, replace=TRUE) #valik TGA mahuga 20
esialgsest valimist
teeta1[i]=mean(valim)
teeta2[i]=median(valim)
teeta3[i]=(min(valim)+max(valim))/2
teeta4[i]=mean(valim,trim=0.1)
}
```

Mitteparameetrilise BS-meetodi rakenduse näide (2)

Hinnangute jaotus karpdiagrammi abil:

```
boxplot(teeta1, teeta2, teeta3, teeta4,
names=c(expression(theta[1]),expression(theta[2]),expression(theta[3]),
expression(theta[4])),
main="Mitteparameetrilise bootstrap-hinnangute karpdiagrammid")
```

Mitteparameetrilise BS-meetodi rakenduse näide (3)



Taylori ritta arendus standardvea leidmiseks

– veel üks alternatiiv standardvea hindamiseks.

Pakkugu θ asemel huvi hoopis selle funktsioon $g(\theta)$ ja oletame, et oskame hinnata θ mõjusa hinnangu $\hat{\theta}$ abil. Mida oskame sel juhul öelda funktsiooni hinnangu $g(\hat{\theta})$ kohta (nihketa? mõjus?)?
Sageli on abiks Taylori ritta arendamise tehnika parameetri θ ümbruses, mis töötab hästi siis kui $\hat{\theta}$ on mõjus hinnang θ-le ning valimimaht on suur. Meetodit nimetatakse veel Delta meetodiks.

Delta meetod:

- sobib kasutamiseks mittelineaarsete hinnangute korral;
- meetod annab ligikaudse tulemuse;
- meetodit rakendatakse suurte valimite korral;
- põhineb hinnangu arendamisel Taylori ritta.

Delta meetod standardvea leidmiseks

Lemma

Olgu $g(\theta)$ huvipakkuv mittelineaarne funktsioon ning $\hat{\theta}$ mõjus hinnang parameetrile θ keskväärtusega $E\hat{\boldsymbol{\theta}} = \theta$ ja dispersiooniga $D\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Kui $g(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ differentseeruv ja $g'(\theta) \neq 0$, siis funktsiooni $g(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ ligikaudne keskväärtus ja dispersioon avalduvad järgmiselt:

$$E[g(\hat{\boldsymbol{\theta}})] \approx g(\theta), \;\; D[g(\hat{\boldsymbol{\theta}})] \approx g'(\theta)^2 D[\hat{\boldsymbol{\theta}}].$$

Tõestus.
Arendame funktsiooni $g(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ Taylori ritta punkti θ ümbruses ja võtame sellest ainult lineaarse liikme:

$$g(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \approx g(\theta) + g'(\theta)(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \theta).$$

Leiame lineaarliikme keskväärtuse:

$$E[g(\hat{\boldsymbol{\theta}})] \approx E[g(\theta)] + g'(\theta)(E\hat{\boldsymbol{\theta}} - \theta) = g(\theta)$$

ja dispersiooni:

$$D[g(\hat{\boldsymbol{\theta}})] \approx D[g(\theta)] + D[g'(\theta)(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \theta)] = g'(\theta)^2 D[\hat{\boldsymbol{\theta}} - \theta] = g'(\theta)^2 D[\hat{\boldsymbol{\theta}}].$$

Delta meetodi kasutamise näide (1)

Näide

Olgu antud suur valim $x_1,\dots,x_n$ *jaotusest* $Exp(\lambda)$, *kus* λ *on huvipakkuv parameeter.*

Varasemast teame, et $EX_i = \frac{1}{\lambda}$ *ja* $DX_i = \frac{1}{\lambda^2}$, $i = 1,\dots,n$.

Kuna $\frac{1}{\lambda}$ *on jaotuse keskväärtus, siis selle hindamiseks sobib valimikeskmine* $\bar{x}$*:* $\frac{1}{\hat{\lambda}} = \bar{x}$, *millest* $\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{x}}$.

Mida osakme öelda hinnangu $\hat{\lambda}$ *keskväärtuse ja dispersiooni kohta? Rakendame Delta meetodit.*

Siin on $\theta = EX$, $\hat{\theta} = \bar{X}$, $g(\hat{\theta}) = 1/\bar{X}$. *Peame teadma veel* $E\hat{\theta}$ *ja* $D\hat{\theta}$*:*

$$E\hat{\theta} = E\bar{X} = \dots = \lambda^{-1} \ \text{ja}\ D\hat{\theta} = D\bar{X} = \dots = (n\lambda^2)^{-1}.$$

Rakendame lemmat hinnangu keskväärtuse leidmiseks:

$$E[g(\hat{\theta})] \approx g(\theta) = \frac{1}{1/\lambda} = \lambda,$$

järelikult tegemist on ligikaudselt nihketa hinnanguga.

Delta meetodi kasutamise näide (2)

Näide (jätkub)

Meil oli $\theta = \lambda^{-1}$, $\hat{\theta} = \bar{X}$, $g(\hat{\theta}) = (\bar{X})^{-1}$, $E\hat{\theta} = \lambda^{-1}$ *ja* $D\hat{\theta} = (n\lambda^2)^{-1}$.
Ligikaudse dispersiooni saamiseks kirjutame esmalt välja $g'(\theta)$*:*

$$g'(\theta) = g'(\hat{\theta})\Big|_{\hat{\theta}=\theta} = \left(\bar{X}^{-1}\right)'\Big|_{\bar{X}=1/\lambda} = -\bar{X}^{-2}\big|_{\bar{X}=1/\lambda} = -\lambda^2.$$

Lemma järgi $D[g(\hat{\theta})] \approx g'(\theta)^2 D[\hat{\theta}]$, *millest*

$$D(\bar{X}^{-1}) \approx \lambda^4 \cdot \frac{1}{n\lambda^2} = \frac{\lambda^2}{n}.$$

Seega, hinnang $\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X}}$ *on ligikaudselt mõjus hinnang parameetrile* λ.

Delta meetod (2)

Delta meetod asümptootiliselt normaaljaotusega hinnangute korral.

Olgu hinnangu $\hat{\theta}_n$ asümptootiliseks jaotuseks normaaljaotus,

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} N(0; {\sigma_\theta}^2).$$

Siis on ka $g(\hat{\theta}_n)$ asümptootilise normaaljaotusega,

$$\sqrt{n}(g(\hat{\theta}_n) - g(\theta)) \xrightarrow{d} N(0; {\sigma_\theta}^2 g'(\theta)^2),$$

kui g' eksisteerib ja $g'(\theta) \neq 0$.

Mitmemõõtmeline versioon Delta meetodist

Olgu hinnangute vektori $\hat{\boldsymbol{\theta}}_n = (\hat{\theta}_{n,1}; \ldots; \hat{\theta}_{n,k})^T$ asümptootiliseks jaotuseks mitmemõõtmeline normaaljaotus,

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} N_k(0; \Sigma).$$

Siis on ka $\mathbf{g}(\hat{\theta}_n)$ asümptootilise normaaljaotusega,

$$\sqrt{n}(\mathrm{g}(\hat{\theta}_n) - \mathrm{g}(\theta)) \xrightarrow{d} N(0; \mathrm{g}'(\theta)\Sigma \mathrm{g}'(\theta)^T),$$

kui g' eksisteerib ja $\mathrm{g}'(\theta) \neq 0$.