

Ülesanne 1

Tudengineiuude pikkuste ja kaalude jaotus on ligilähedaselt kahemõõtmelise normaaljaotusega:

$$\begin{pmatrix} PIKKUS \\ KAAL \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}_2 \left(\begin{pmatrix} 168 \\ 59 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 34 & 27 \\ 27 & 76 \end{pmatrix} \right).$$

Teame, et meile huvi pakkuva tudengineiu pikkus on 175 cm. Milline võiks olla prognoos selle tudengineiu kaalule? Leia prognoos (tinglik keskväärts) ja 95%-prognoosiintervall (vahemik, kuhu pikkusega 175 cm tudengineiu kaal sattub tõenäosusega 0,95).

Ülesanne 2

Olgu \mathbf{A} suvaline $k \times n$ konstantne maatriks, \mathbf{X} n -mõõtmeline juhuslik vektor ja \vec{c} mingi konstantne vektor. Eeldame lisaks, et $E(\mathbf{X})$ eksisteerib ja kõik selle komponendid on lõplikud. Veendu et kehtivad võrdused

1. $E(\mathbf{A}\mathbf{X} + \vec{c}) = \mathbf{A}E(\mathbf{X}) + \vec{c}$,
2. $D(\mathbf{A}\mathbf{X} + \vec{c}) = \mathbf{A}D(\mathbf{X})\mathbf{A}^T$.

Ülesanne 3

Olgu \mathbf{A} pööratav $n \times n$ maatriks, $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$ ja $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Näita, et $\mathbf{A}\mathbf{X} + \vec{c} \sim \mathcal{N}_n(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu} + \vec{c}; \mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}^T)$.

Vihje: $(\mathbf{A}\mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$; $|\mathbf{A}\mathbf{B}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$; $(\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$; $|\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{A}|^{-1}$.

Ülesanne 4

Teadaolevalt on IQ-testide skoor skaleeritud nii, et $IQ \sim \mathcal{N}(100, 15)$. Paraku on IQ täpne mõõtmine üldjuhul väga tülikas (mõõtmised võivad kesta mitu päeva järjest) ja praktikas kasutatakse IQ mõõtmiseks teste, mis annavad ligikaudse tulemuse. Vaatleme ühte konkreetset testi T . Kui tõeline $IQ = x$, on testi tulemus vastavalt $T|IQ = x \sim \mathcal{N}(x, 10)$. Veendu, et vektor $(IQ, T)^T$ on kahemõõtmelise normaaljaotusega!

1. Kirjuta välja ühistihedus $f_{IQ,T}(x, t)$.
2. Leia testiskoori keskväärts ET ja dispersioon DT .
Vihje: $DT = D(E(T|IQ)) + E(D(T|IQ))$.
3. Leia vektori (IQ, T) kovariatsioonimaatriks $\boldsymbol{\Sigma}$.
4. Veendu, et tihedusfunktsioon $f_{IQ,T}(x, t)$ vastab jaotusele $N_2(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, kus $\boldsymbol{\mu} = (E(IQ), E(T))^T$ ja $\boldsymbol{\Sigma}$ on punktis 3 leitud kovariatsioonimaatriks.
Vihje: $(t - x)^2 = (t - x + 100 - 100)^2 = ((t - 100) - (x - 100))^2$.

Kui jääb aega: Leia tinglik jaotus $IQ|T = 110$.