Tõenäosusteooria ja statistika II

Loeng 9

Hinnangufunktsioon, punkthinnang ja hinnangu omadused

Märt Möls

Näide: soovime hinnata keskväärtust E(X)

Milline on tudengite süstoolsete vererõhkude keskväärtus?

Võtame valimi:

110 110 120 105 130 130 120 120 120 120

Mida valida?

- kasutame keskmist;
- küsime nõialt;
- valime juhuslikult ühe vaatluse;
- mediaan;
- miinimumi ja maksimumi keskmine;
- ....

Kuidas valida?

Hinnangufunktsioon (*estimator*)

hinnatav parameeter

θ

hinnangufunktsioon – valimi funktsioon

$\hat{\theta}(valim)$ $\quad$ $\hat{\theta}(X_1; X_2; \dots; X_n)$

$$\hat{\mu}(X_1; X_2; \dots; X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Punkthinnang (*estimate*)

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1; x_2; \dots; x_n) \qquad \bar{x}$$

Kuidas hinnangufunktsioon juhusliku valimi korral käitub?

Kas hinnangufunktsioonil on lubatud funktsionaalsus?

Mõjus (*inglise k. consistent*; *soome k. tarkentuva*)

Hinnang $\hat{\theta}$ on mõjus, kui $\forall\theta$ ja $\forall\varepsilon > 0$ korral

$$\mathrm{P}\left(\left|\hat{\theta}(X_1; \dots; X_n) - \theta\right| > \varepsilon\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Valimi keskmine on mõjus hinnang keskväärtusele (suurte arvude seadus):

$$P\left(|\overline{X} - \mu| > \varepsilon\right) = P\left(\left|\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| > \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\varepsilon\right)$$

$$= 2\left(1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\varepsilon\right)\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Kuidas hinnangufunktsioon juhusliku valimi korral käitub?

Kas hinnangufunktsioonil on lubatud funktsionaalsus?

Mõjus (*inglise k. consistent*; *soome k. tarkentuva*)

Hinnang $\hat{\theta}$ on mõjus, kui $\forall\theta$ ja $\forall\varepsilon > 0$ korral

$$\mathrm{P}\left(\left|\hat{\theta}(X_1; \dots; X_n) - \theta\right| > \varepsilon\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Valimi keskmine on mõjus hinnang keskväärtusele (suurte arvude seadus).

Kui vaatlused on normaaljaotusega, siis on mõjusateks hinnanguteks keskväärtusele ka mediaan; alumise ja ülemise kvartiili vahele jäävate vaatluste keskmine ja ülemise ning alumise kvartiili keskmine…

Kuidas hinnangufunktsioon juhusliku valimi korral käitub?

Kas hinnangufunktsioonil on aus?

Nihketa (*unbiased*) hinnang

Hinnang $\hat{\theta}$ on nihketa, kui $\forall\theta$ korral

$$\mathrm{E}\left(\hat{\theta}(X_1; \dots; X_n)\right) = \theta.$$

Valimi keskmine on nihketa hinnang keskväärtusele.

Nihketa hinnang keskväärtusele on ka valimi esimene vaatlus.
Normaaljaotuse korral on nihketa hinnanguks ka valimi mediaan.

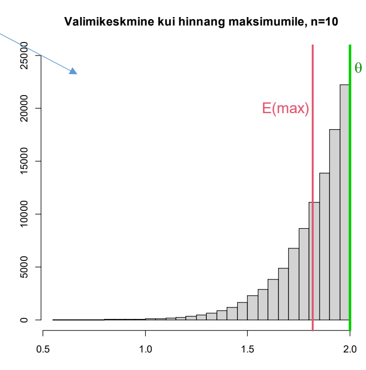
Näide

Kui X_1, …, X_n on juhuslik valim jaotusest U(0; θ) siis

max(X_1, …, X_n) on nihkega hinnang

ja

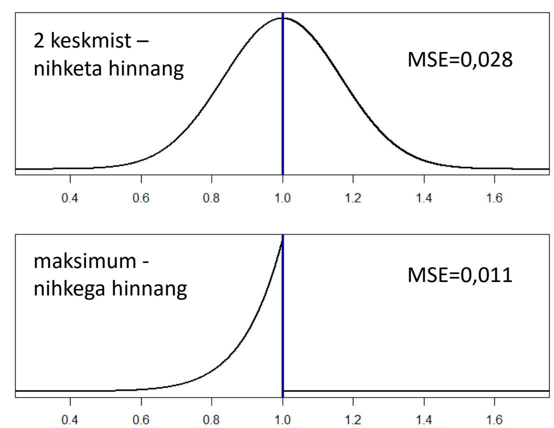
$2\bar{X}$ on nihketa hinnang parameetrile θ.



Näide

X_1, …, X_n on juhuslik valim jaotusest U(0; θ)

Nihkega hinnang võib osutuda täpsemaks kui nihkega hinnang



Näide 2

X_1, …, X_n on juhuslik valim jaotusest N(μ; 4)

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

nihketa hinnang!

$$\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 \qquad \mathrm{E}(X^2) = \mathrm{D}(X) + (\mathrm{E}(X))^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\mathrm{D}\left(X_i - \overline{X}\right) + \left(\mathrm{E}\left(X_i - \overline{X}\right)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{D}\left(X_i - \overline{X}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\mathrm{D}\left(-\frac{1}{n}X_1 - \frac{1}{n}X_2 - \ldots + \frac{n-1}{n}X_i - \ldots - \frac{1}{n}X_n\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n^2}\mathrm{D}(X) + \frac{1}{n^2}\mathrm{D}(X) + \ldots \frac{(n-1)^2}{n^2}\mathrm{D}(X) + \ldots \frac{1}{n^2}\mathrm{D}(X)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{n-1}{n^2}\mathrm{D}(X) + \frac{(n-1)^2}{n^2}\mathrm{D}(X) = n\frac{(n-1)(1+n-1)}{n^2}\mathrm{D}(X)$$

$$= (n-1)\mathrm{D}(X)$$

Näide 2

X_1, …, X_n on juhuslik valim jaotusest N(μ; 4)

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \qquad \text{MSE = 8,0}$$

$$\sigma_2^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \qquad \text{MSE = 5,8}$$

$$\sigma_3^2 = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \qquad \text{MSE = 5,3}$$

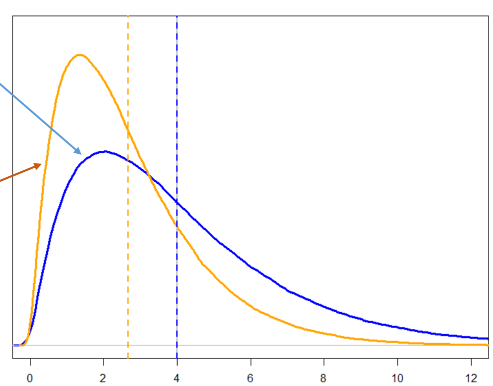
Näide 2

X_1, …, X_n on juhuslik valim jaotusest N(μ; 4)

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

$$\sigma_2^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

$$\sigma_3^2 = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$



Kuidas hinnangufunktsioon juhusliku valimi korral käitub?

Milline hinnang on täpseim?

Külanõid annab kõigile küsimustele alati vastuseks 2 (ainus number, mida ta inglise keeles öelda oskab).

Kaks aastat tagasi küsis Jüri külanõialt arvamust – milline võiks olla ühe konkreetse populatsiooni keskväärtus.
Külanõid vastas: „*Two!*“ (ehk kaks).
Hiljem tehtud kõikse uuringu käigus selgus, et keskväärtus oligi kaks. Külanõia arvamus oli täpsem kui valimi keskmine (1,96) ja täpsem kui mediaan (2,01). Kas kuulutame külanõia kõige täpsemaks keskväärtuse hindajaks ja kasutame teda ka edaspidi meid huvitavate keskväärtuste hindamisel?

Kuidas hinnangufunktsioon juhusliku valimi korral käitub?

Milline hinnang on täpseim?

Ühe realiseerunud juhusliku valimi korral ja ühe uuritava populatsiooni korral pole võimalik öelda, milline hindamisfunktsioon annab täpseima tulemuse (nagu pole võimalik öelda, milline poes müügil olevatest lambipirnidest kõige kauem sinu lambis töötaks). Lambipirni võime valida selle järgi, millist tüüpi pirn keskmiselt kõige kauem vastu peab (kõrgeid temperatuure taluva kondensaatoriga varustatud led-pirn).

Hinnangu täpsust mõõdame üle erinevate juhuslike valimite – eelistame sellist, mis keskmiselt (üle erinevate juhuslike valimite) annab täpsemaid tulemusi kui mõni teine hinnang (mistahes parameetri väärtuse korral).

Tüüpilised mõõdikud:

keskmine ruutviga (MSE)

$$E(\hat{\theta}-\theta)^2$$

keskmine absoluutviga (MAE)

$$E|\hat{\theta}-\theta|$$

Tõestame: $\mathrm{MSE}(\hat{\theta}) = \mathrm{D}\left(\hat{\theta}\right) + \mathrm{nihe}^2$

$$\begin{aligned}\mathrm{MSE}(\hat{\theta}) &= \mathrm{E}\left(\hat{\theta}-\theta\right)^2 \\ &= \mathrm{D}\left(\hat{\theta}-\theta\right) + \left(\mathrm{E}(\hat{\theta}-\theta)\right)^2 \\ &= \mathrm{D}\left(\hat{\theta}\right) + \left(\mathrm{E}(\hat{\theta})-\theta\right)^2 \\ &= \mathrm{D}\left(\hat{\theta}\right) + \mathrm{nihe}^2\end{aligned}$$

$$\mathrm{E}(X^2) = \mathrm{D}(X) + (\mathrm{E}(X))^2$$

Nihketa hinnangute puhul iseloomustatakse hinnangu täpsust sageli kasutades hinnangu dispersiooni.

Suhteline efektiivsus

Nihketa hinnang $\widehat{\theta_1}$ on efektiivsem kui nihketa hinnang $\widehat{\theta_2}$ kui $\mathrm{D}(\widehat{\theta_1}) \leq \mathrm{D}(\widehat{\theta_2})$ mistahes θ väärtuse korral ja vähemalt ühe võimaliku θ väärtuse korral $\mathrm{D}(\widehat{\theta_1}) < \mathrm{D}(\widehat{\theta_2})$.

Kui võrreldakse nihkega hinnanguid, siis peab efektiivsem hinnang olema väiksema keskmise ruutveaga.

Efektiivne hinnang (*efficient estimator*)

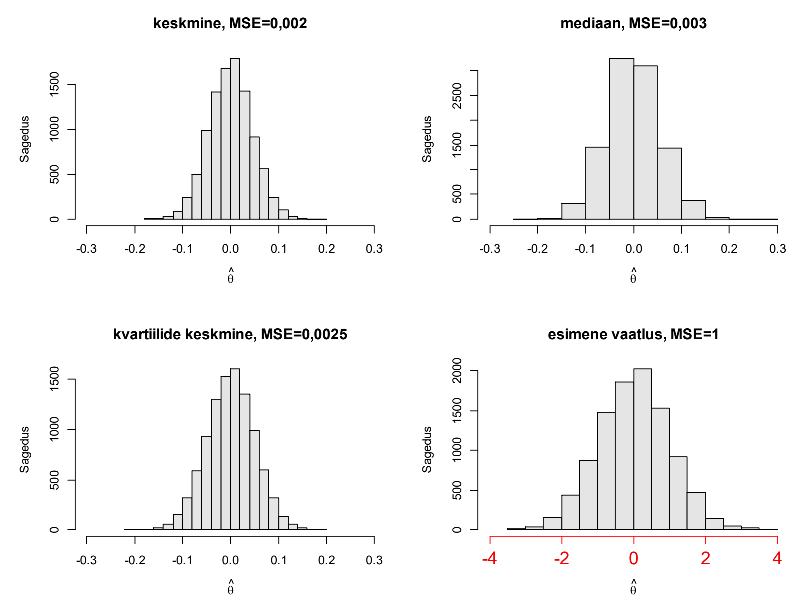
Nihketa hinnangut $\hat{\theta}$ kutsutakse efektiivseks kui

$$D(\hat{\theta}) \leq D(\tilde{\theta})$$

mistahes teise nihketa hinnangu $\tilde{\theta}$ korral.

Kui vaatlused on normaaljaotusega, siis on valimikeskmine efektiivne hinnang keskväärtusele.

Populatsioon: N(0;1); *n*=500



Asümptootiline efektiivsus

Vahel on võimalik näidata, et mingi hinnang ei pruugi küll olla efektiivne, kuid selle hinnangu keskmine ruutviga või dispersioon muutub suurte valimite korral samasuureks kui efektiivse hinnangu keskmine ruutviga/dispersioon. Sellisel juhul räägime, et mingi hinnang on asümptootiliselt efektiivne hinnnag.

Teisi omadusi

- Hinnangu robustsus
- Hinnangu leidmise hind (arvutuslik keerukus)
- ....