Tõenäosusteooria ja statistika II

Loeng 1

29. august 2022

Kuidas kirjeldada juhuslikkust?

Märt Möls

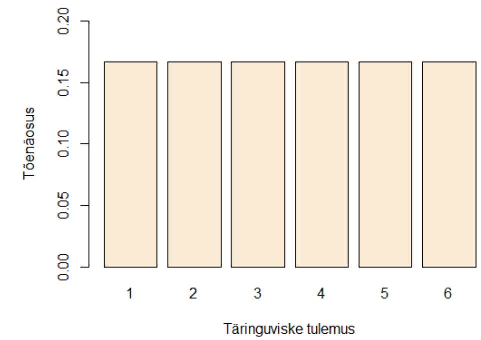
mart.mols@ut.ee

Kursuse koduleht:
www-1.ms.ut.ee/mart/TS2

Juhuslikkuse kirjeldamine

Tõenäosusfunktsioon
probability mass function

k	1	2	3	4	5	6
P(X=k)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6



Juhuslikkuse kirjeldamine

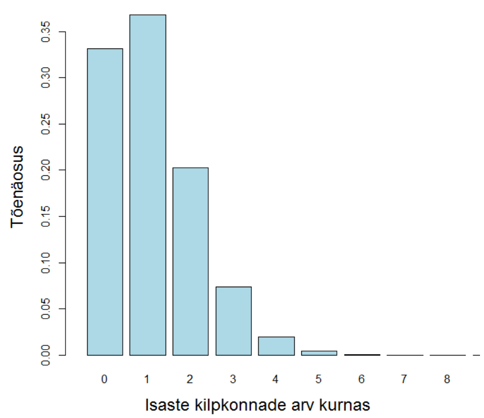
Tõenäosusfunktsioon
probability mass function

Roheline merikilpkonna 110 munast kooruvate isaste merikilpkonnade arvu jaotus

$P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

$P(X=k)=C_{110}^k\, 0{,}01^k (1-0{,}01)^{110-k}$

$X \sim B(n=110; p=0{,}01)$



Juhuslikkuse kirjeldamine

Tõenäosusfunktsioon
probability mass function

Tõenäosusfunktsiooni ei saa vahel kasutada!

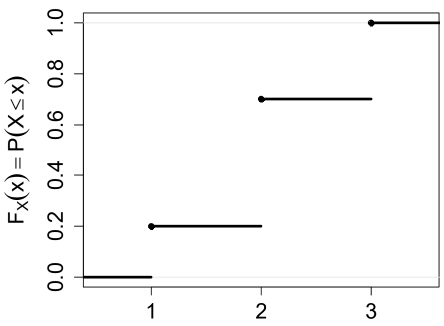
Juhuslik suurus X:
päeva jooksul alla sadanud vee kogus

k	P(X=k)
0	0,592
...	0
0,120034590023...	0
...	0

Jaotusfunktsioon (meenutuseks) $F_X(x) = P(X \le x)$

Diskreetne juhuslik suurus *X*

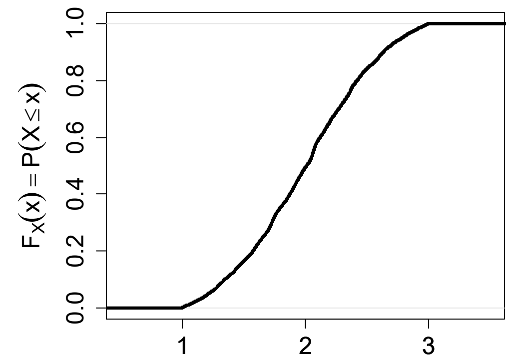
x	P(*X*=*x*)
1	0,2
2	0,5
3	0,3



Jaotusfunktsioon (meenutuseks) $F_X(x) = P(X \le x)$

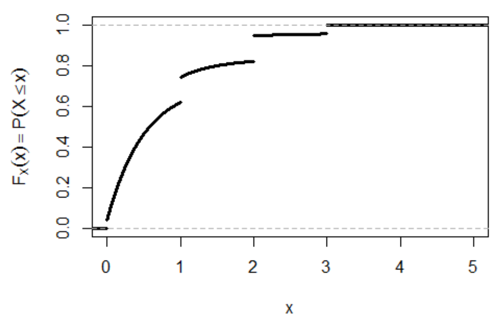
Pidev juhuslik suurus – jaotusfunktsioon on pidev!

Pideva juhusliku suuruse korral on mistahes konkreetse väärtuse esinemistõenäosus 0!



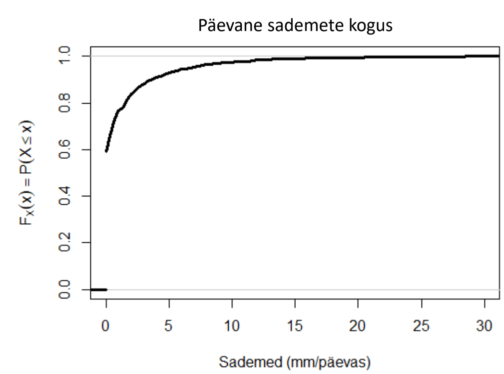
Jaotusfunktsioon (meenutuseks) $F_X(x) = P(X \le x)$

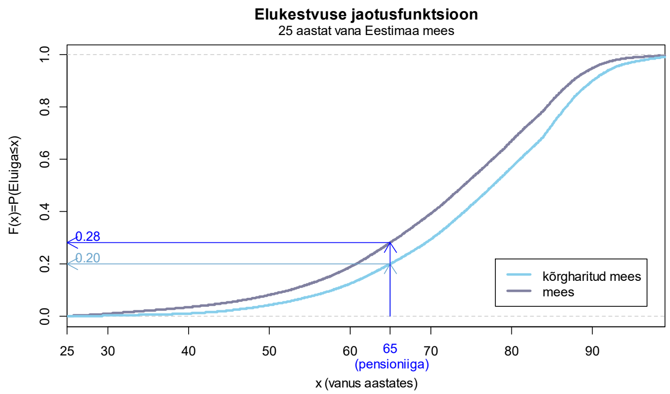
Eksisteerib ka juhuslikke suuruseid mis pole ei diskreetsed ega pidevad:

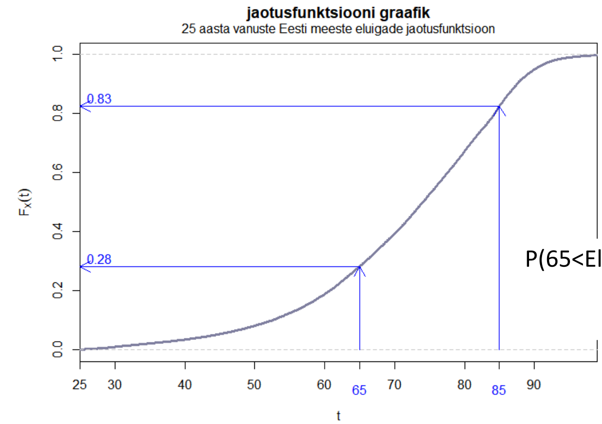


Jaotusfunktsioon (meenutuseks) $F_X(x) = P(X \le x)$

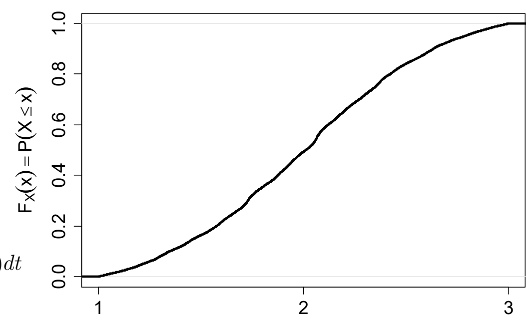
Eksisteerib ka juhuslikke suuruseid mis pole ei diskreetsed ega pidevad:





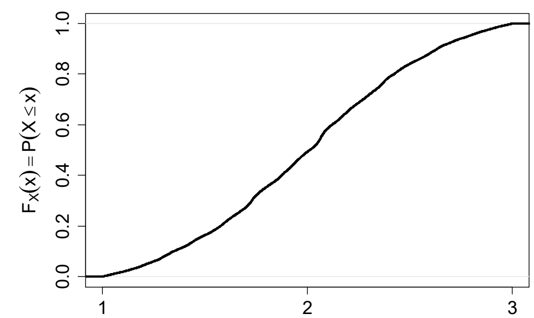


P(65<Eluiga≤85)=
= F(85)-F(65)
= 0,55

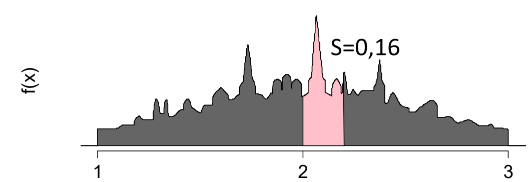


$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

$$f_X(x) = \frac{\partial F_X(x)}{\partial x}$$



P(2<X≤2,2)=0,16



Tõenäosusfunktsioon, jaotusfunktsioon, tihedusfunktsioon – kas leidub alternatiive?

Juhusliku suuruse jaotust saab kirjeldada ka teisiti...

- Momente genereeriv funktsioon
- Karakteristlik funktsioon

Mis on momendid?

Juhusliku suuruse *X* *k*-ndat järku momendiks nimetatakse arvu:

$$m_k = \mathrm{E}(X^k)$$

Tõenäosusfunktsioon, jaotusfunktsioon, tihedusfunktsioon – kas leidub alternatiive?

Juhusliku suuruse jaotust saab kirjeldada ka teisiti...

- Momente genereeriv funktsioon
- Karakteristlik funktsioon

Momente genereeriv funktsioon:

$$M_X(t) = \mathrm{E}(e^{tX}), t \in \mathcal{R}$$

$$\exp(x) = 1 + x + x^2/2 + x^3/6 + \ldots + x^k/k! + \ldots$$

Jaotuse *k*. moment on leitav kui momente genereeriva funktsiooni *k*. tuletis kohal 0: $m_k = M_X^{(k)}(0)$

Tõenäosusfunktsioon, jaotusfunktsioon, tihedusfunktsioon – kas leidub alternatiive?

Juhusliku suuruse jaotust saab kirjeldada ka teisiti...

- Momente genereeriv funktsioon
- Karakteristlik funktsioon

Momente genereeriv funktsioon:

$$M_X(t) = \mathrm{E}(e^{tX}), t \in \mathcal{R}$$

$$\exp(tx) = 1 + t \cdot x + t^2 \cdot x^2/2 + \ldots + t^k x^k/k! + \ldots$$

Jaotuse *k*. moment on leitav kui momente genereeriva funktsiooni *k*. tuletis kohal 0: $m_k = M_X^{(k)}(0)$

Tõenäosusfunktsioon, jaotusfunktsioon, tihedusfunktsioon – kas leidub alternatiive?

Juhusliku suuruse jaotust saab kirjeldada ka teisiti...

- Momente genereeriv funktsioon
- Karakteristlik funktsioon

Momente genereeriv funktsioon:

$$M_X(t) = \mathrm{E}(e^{tX}), t \in \mathcal{R}$$

$$\exp(tx) = 1 + t \cdot x + t^2 \cdot x^2/2 + \ldots + t^k x^k/k! + \ldots$$

$$\mathrm{E}(\exp(tx)) = 1 + t \cdot \mathrm{E}(x) + t^2 \cdot \mathrm{E}(x^2)/2 + \ldots + t^k \mathrm{E}(x^k)/k! + \ldots$$

$$\mathrm{E}(\exp(tx))' = \mathrm{E}(x) + 2t \cdot \mathrm{E}(x^2)/2 + \ldots + kt^{k-1}\mathrm{E}(x^k)/k! + \ldots$$

Momente genereeriva fn-i leidmine, näide

$$X \sim Exp(\lambda) \qquad f_X(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x) & \text{, kui } x \geq 0; \\ 0 & \text{, kui } x < 0; \end{cases}$$

$$\mathrm{E}(\exp(tX)) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(tx) f_X(x) dx = \int_{0}^{\infty} \exp(tx) \lambda \exp(-\lambda x) dx$$

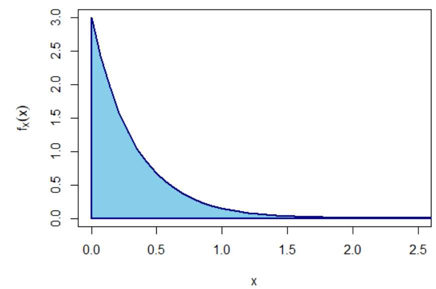
$$= \lambda \int_0^{\infty} \exp((t-\lambda)x) dx = \frac{\lambda}{t-\lambda} \exp((t-\lambda)x) \Big|_{x=0}^{x=\infty}$$

$$= \frac{\lambda}{t-\lambda} \left(\lim_{x \to \infty} \exp((t-\lambda)x) - 1 \right) = \frac{\lambda}{t-\lambda} (0-1) \qquad \text{kui } t < \lambda$$

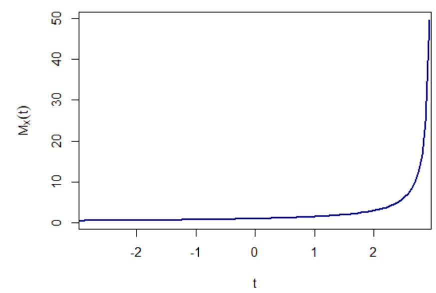
$$= \frac{\lambda}{\lambda - t} \quad \text{kui } t < \lambda$$

Miks vajame momente genereerivat funktsiooni?

tihedusfunktsioon



momente genereeriv funktsioon



Miks vajame momente genereerivat funktsiooni?

Sageli arvutustes/tuletuskäikudes mugavam kasutada

Näiteks:

Kahe sõltumatu juhusliku suuruse *X* ja *Y* summa momente genereeriv funktsioon $M_{X+Y}(t) = M_X(t)\, M_Y(t)$

Normaaljaotusega juhusliku suuruse X~N(μ; σ^2) momente genereeriv funktsioon on kujul: $M_X(t) = \exp(\mu t + \sigma^2 t^2/2)$

Kahe sõltumatu normaaljaotusega juhusliku suuruse X~N(μ_1; σ_1^2) ja Y~N(μ_2; σ_2^2) summa momente geneereeriv funktsioon on seega:

$$M_{X+Y}(t) = \exp(\mu_1 t + \sigma_1^2 t^2/2) \exp(\mu_2 t + \sigma_2^2 t^2/2) = \exp((\mu_1 + \mu_2)t + (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)t^2/2)$$

Järelikult on ka summa *X+Y* jaotuseks normaaljaotus, N($\mu_1 + \mu_2$; $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$)!

Karakteristlik funktsioon

- Momente genereerivat funktsiooni ei pruugi leiduda (sest on ka juhuslikke suuruseid, mille momente – näieks keskväärtust – ei eksisteeri). Seevastu juhusliku suuruse karakteristlik funktsioon eksisteerib alati.

Näide ilma keskväärtuseta juhusliku suuruse realisatsioonidest:
4.741... 5.039... 6.050... 10.151... 3.945... 4.908... 10.607... 6.159...

Lahendus – kasutame karakteristlikku funktsiooni (millel sarnased omadused mis momente genereerival funktsioonil kuid mis eksisteerib alati, kõigi juhuslike suuruste jaoks).

Karakteristlik funktsioon

Juhusliku suuruse *X* karakteristlik funktsioon on defineeritud kui:

$$\varphi_X(t) = \mathrm{E}(e^{itX}), t \in \mathcal{R}$$

Antud kursuse raames piisab meile reaalarvuliste väärtustega momente genereerivast funktsioonist – karakeristliku funktsiooni definitsiooni ja kasutusoskust antud aine eksamil ei nõuta.