TÕENÄOSUSTEOORIA I

Loengukonspekt

kevad 2009

Jüri Lember

Kirjandus:

1. G. Grimmet, D. Stirzaker, "Probability and random processes", Oxford 1994, 2001
2. S. Ross "Introduction to probability models", Elsevier/AP, 2007
3. P. Pfeiffer, "Probability with applications", Springer 1990
4. P. Billingsley, "Probability and measure", Wiley 1995
5. A. Shirjajev, "Verojatnost", Nauka 1989
6. D. Williams, "Probability with martingales", Cambridge 1991
7. $\cdots$

Konspekt: ÕIS

Peatükk 1

Sündmused ja tõenäosused

1.1 Meeldetuletus kombinatoorikast

Alljärgnevas tuletame meelde kursuses vajaminevad elementaarteadmised kombinatoorikast.

Kombinatoorika põhireegel. *Kui me moodustame k-elemendilist järjestatud kogumit, kusjuures esimesele kohale on võimalik valida n_1 elemendi vahel, pärast esimese elemendi valimist on teisele kohale alati võimalik valida n_2 elemendi vahel, ... ja pärast eelviimase elemendi valimist on meil viimasele kohale alati võimalik valida n_k elemendi vahel, siis on kokku võimalik saada $n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$ erinevat järjestatud kogumit.*

Selle reegli abil on võimalik tuletada mitmeid tuntud valemeid:

- k-elemendiliste järjestatud komplektide moodustamisel n erinevast elemendist nii, et kordused on lubatud, on võimalik saada n^k erinevat komplekti. Neid komplekte nimetatakse ka **kordustega variatsioonideks**. Näiteks kolm korda täringut visates on erinevaid tulemuste kolmikuid (kus ka järjekord on fikseeritud) 6^3.
- n elemendi kõikvõimalikke järjestusi ehk **permutatsioone** on $n!$, sest esimesele kohale saame paigutada suvalise nendest n elemendist, teisele kohale tuleb paigutada üks ülejäänud $(n-1)$-st elemendist jne. Näiteks 5 õpilast võivad reastuda $5! = 120$ erineval moel.
- **Variatsioonideks n elemendist k kaupa** nimetatakse k elemendiliste järjestatud (kordusi mittesisalduvate) komplektide moodustamist n erinevast elemendist. Kombinatoorika põhireegli kohaselt on nende arvuks
$$V_n^k = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$
Näiteks kuue võistkonnaga turniiri korral on esemese kolme koha jagunemiseks $V_6^3 = 120$ erinevat võimalust (eeldusel, et kohta jagama ei saa jääda).
- Et n-elemendilise hulga k-elemendilisele alamhulgale vastab $k!$ erinevat k-elemendilist järjestatud ilma kordusteta komplekti, siis neid k-elemendili alamhulki ehk **kombinatsioone n elemendist k kaupa** on kokku
$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{V_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Näiteks 52 mängukaardi abil saab moodustada $C_{52}^{13} = \frac{52!}{13!\,39!}$ erinevat 13-kaardilist bridzikätt.

Kombinatsioon n elemendist k kaupa on vaadeldav n-elemendilise hulga kaheks jagamisega: esimeses alamhulgas on k elementi, teises $n-k$, selliste jagamiste arv on $\frac{n!}{k!(n-k)!}$. Oletame, et jagame n-elemendilise hulga kolmeks: esimeses on k_1 elementi, teises k_2 ja kolmandas $n-k_1-k_2 =: k_3$ elementi. Esimese, k_1 elemendilise alamhulga, valikuks on $C_n^{k_1}$ võimalust. Pärast esimese alamhulga eristamist on teise alamhulga leidmiseks $C_{n-k_1}^{k_2}$ võimalust. Kokku seega

$$\frac{n!}{k_1!(n-k_1)!}\frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!} = \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!}$$

võimalust. Üldistades seda arutluskäiku saame, et jagades n-elemendilise hulga l-alamhulgaks nii, et i-nda alamhulga suurus on k_i ($k_1+\cdots+k_l=n$), on (järjekorda arvestamata)

$$\binom{n}{k_1,\ldots,k_l} = \frac{n!}{k_1!\cdots k_l!}$$

võimalust. Näiteks kaardipaki jagamisel neljaks on $\frac{52!}{13!13!13!13!}$ võimalust.

- **Kordustega kombinatsioonideks n elemendist k kaupa** nimetatakse selliseid kombinatsioone k-kaupa, kus elemendid võivad korduda. Kordustega kombinatsioonide korral võib $k > n$. Näiteks kordustega kombinatsioonid neljast elemendist $\{1,2,3,4\}$ kolme kaupa on järgmised

111	112	113	114	122	123	124	133	134	144
222	223	224	233	234	244	333	334	344	444.

Võrdluseks (kordusteta) kombinatsioonid: 123 124 234 134.

Induktsiooniga on võimalik näidata, et kordustega kombinatsioonide arv n-st k kaupa on

$$C_{n+k-1}^{k} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{n+k-1!}{k!\,(n-1)!}.$$

Tõepoolest, olgu $N(n,k)$ kordustega kombinatsioonide arv n-st k kaupa. On selge, et kui $k=1$, siis iga n korral $N(n,1)=n=C_n^1$. Olgu nüüd $k\geq 1$ ja oletame, et iga n ka k korral kehtib

$$N(n,k) = C_{n+k-1}^{k}. \tag{1.1}$$

Veendume, et (1.1) kehtib ka iga n ja $k+1$ korral. Vali suvaline n. Tähistame n elementi $\{1,\ldots,n\}$. Iga kordustega kombinatsioon n-st $k+1$ kaupa on kujul $a_1,\ldots,a_{k+1}$, kus $a_1\leq\cdots\leq a_{k+1}$ ja $a_i\in\{1,\ldots,n\}$. On selge, et nende kordustega kombinatsioonide arv, kus $a_1=1$ on sama mis kordustega kombinatsioonide arv n-st k kaupa. Samuti nende kordustega kombinatsioonide arv, kus $a_1=2$ on sama mis kordustega kombinatsioonide arv $n-1$-st k kaupa jne. Seega $N(n,k+1)=N(n,k)+N(n-1,k)+\cdots+N(1,k)$. Vastavalt induktsiooni eeldusele seega

$$N(n,k+1) = C_{n+k-1}^{k} + C_{n-1+k-1}^{k} + \cdots + C_{1+k-1}^{k} = \sum_{r=k}^{k+n-1} C_r^k.$$

Arvestades, et iga $r \geq k+1$ korral $C_r^k + C_r^{k+1} = C_{r+1}^{k+1}$ (veendu selles!) ehk

$$C_r^k = C_{r+1}^{k+1} - C_r^{k+1},$$

saame

$$\sum_{r=k}^{k+n-1} C_r^k = C_k^k + (C_{k+2}^{k+1} - C_{k+1}^{k+1}) + (C_{k+3}^{k+1} - C_{k+2}^{k+1}) + \cdots + (C_{k+n-1}^{k+1} - C_{k+n-2}^{k+1}) + (C_{k+n}^{k+1} - C_{k+n-1}^{k+1}) = C_{k+n}^{k+1}.$$

1.2 Sündmused

1.2.1 Elementaarsündmused

Definitsioon 1.2.1 Juhuslik katse *on igasugune tegevus, mille tulemus ei ole antud tingimustes üheselt määratud.*

Juhuslikul katsel on rohkem kui üks võimalik tulemus, kusjuures me eeldame, et katsetulemused on üksteist välistavad – võimalikest tulemustest realiseerub ainult üks.

Definitsioon 1.2.2 *Juhusliku katse võimalikke tulemusi nimetatakse* **elementaarsündmusteks** *(outcome), mida tähistame kujul ω. Antud katse kõigi elementaarsündmuste hulka nimetatakse* **elementaarsündmuste ruumiks** *(sample space), mida tähistatakse sümboliga Ω.*

Elementaarsündmused sõltuvad sellest, mida katse tulemusena "kirja pannakse". Seega võib sama reaalse katse (näiteks täringuvise) korral vaadelda erinevaid elementaarsündmuste ruume. Toome mõne näite juhusliku katse ja elementaarsündmuste kohta.

Näited:

1. Mündivise. Tavaliselt vaadeldakse olukorda $\Omega = \{\text{vapp, kiri}\}$. Sõltuvalt katse sooritamise viisist, eesmärgist ja kasutatavast mündist võib mõnikord olla vajalik ka vaadelda olukorda, kus võimalikeks elementaarsündmusteks on $\Omega' = \{\text{vapp, kiri, serva peal}\}$ või $\Omega'' = \{\text{lapiti, serva peal}\}$. Viimasel juhul huvitab meid ainult see, kas münt jääb serva peale seisma või mitte.

2. Täringuvise. Tavaliselt $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, kuid kui täringut kasutatakse näiteks mündi asendajana, siis võib võtta ka $\Omega = \{\text{paaris, paaritu}\}$.

3. Kaardipakk peale kaartide segamist. Olgu pakis K kaarti. Kaardipakki võib seega vaadelda kaartide hulga $\{1, \ldots, K\}$ järjestusena. Seega iga elementaarsündmus on hulga $\{1, \ldots, K\}$ permutatsioon, elementaarsündmuste ruumi võimsus on $K!$.

4. n mündiviset. Siin elementaarsündmus on n-dimensionaalne vektor $(a_1, \ldots, a_n)$, kus a_i on kas vapp või kiri. Elementaarsündmuste ruum on seega

   $$\Omega = \big\{(a_1, \ldots, a_n) : a_i \in \{v, k\}, i = 1, \ldots, n\big\},$$

   kus v = vapp ja k = kiri. Seega 3 mündiviske korral on elementaarsündmuste ruum

   $$\Omega = \Big\{(k,k,k), (k,k,v), (k,v,k), (v,k,k), (v,v,k), (v,k,v), (k,v,v), (v,v,v)\Big\}.$$

5. Tagasipanekuga urni mudel, järjestatud komponentidega elementaarsündmused. Olgu urnis M erinevat kuuli (kuulid $1, \dots, M$). Urnist võetakse kuul, registreeritakse selle väärtus ja pannakse siis tagasi. Nii toimitakse n korda. Kui kuule on 2, on sisuliselt tegemist n mündiviskega. Elementaarsündmuste ruum on siis

$$\Omega = \big\{(a_1, \dots, a_n) : a_i \in \{1, \dots, M\}, \quad i = 1, \dots, n\big\}.$$

Elementaarsündmused on seega n-elemendilised järjestatud komplektid M erinevast elemendist, nende arv on M^n.

6. Tagasipanekuga urni mudel, järjestamata komponentidega elementaarsündmused. Oletame, et kuulide registreerimisel ei märgita nende väljavõtmise järjekorda. Seega, kui näiteks võeti (järjekorras) kuulid $1, 2, 1, 5$, siis registreeritakse küll, et kuuli nr.1 võeti kaks korda, kuuli nr. 2 ja kuuli nr 5. võeti kumbagi üks kord, kuid kas kuulide võtmise järjekord oli $1, 2, 1, 5$ või $1, 1, 2, 5$ või hoopis $5, 2, 1, 1$, seda me teada ei saa. Sellist elementaarsündmust tähistame $[1, 1, 2, 5]$ ning ülalöeldust on selge, et $[1, 1, 2, 5] = [1, 2, 1, 5] = [5, 2, 1, 1]$. Üldiselt on elementaarsündmus $[a_1, \dots, a_n]$, kus $a_i \in \{1, \dots, M\}$ iga $i = 1, \dots, n$ korral. Et komponentide järjekord pole oluline, võime kirjutada $[a_1, \dots, a_n]$ nii, et $a_1 \leq \dots \leq a_n$. Seega elementaarsündmuste ruum on

$$\Omega = \{[a_1, \dots, a_n] : a_1 \leq \dots \leq a_n \quad a_i = 1, \dots, M, \quad i = 1, \dots, n\}.$$

Kui urnis on kaks kuuli ja neid võetakse välja kolm korda, siis elementaarsündmuste ruum on järgmine

$$\Omega = \{[1, 1, 1], [1, 1, 2], [1, 2, 2], [2, 2, 2]\}.$$

Elementaarsündmuste arv on nüüd kordustega kombinatsioonide arv M-elemendist n kaupa, kombinatoorikast on teada, et nende arv on

$$C^n_{M+n-1} = \binom{M+n-1}{n}.$$

7. Tagasipanekuta urni mudel, järjestatud komponentidega elementaarsündmused. Sellise mudeli korral urnist võetud kuuli tagasi ei panda. Iga kuuli võib urnist võtta vaid üks kord, samas on registreeritud kuulide järjekord. Siin $M \geq n$. Elementaarsündmused on

$$\Omega = \big\{(a_1, \dots, a_n) : a_i \in \{1, \dots, M\}, \quad a_k \neq a_l, k \neq l, \quad i = 1, \dots, n\big\}.$$

Elementaarsündmused on seega variatsioonid M-st n kaupa ja nende arv on V^n_M. Kui urnis on 3 kuuli ja $n = 2$, siis

$$\Omega = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}.$$

8. Tagasipanekuta urni mudel, järjestamata komponentidega elementaarsündmused. Sellisel juhul kuule urni tagasi ei panda, samuti ei registreerita järjestust. Elementaarsündmused on

$$\Omega = \{[a_1, \dots, a_n] : a_1 < \dots < a_n, \quad a_i = 1, \dots, M, i = 1, \dots, n\}.$$

Elementaarsündmused on seega kombinatsioonid M-st n kaupa ja nende arv on

$$C_M^n = \binom{M}{n}.$$

Kui urnis on 3 kuuli ja $n = 2$, siis

$$\Omega = \{[1,2],[1,3],[2,3]\}.$$

9. Mündivise esimese vapi tulekuni. Sel juhul on elementaarsündmusi loenduv hulk ning $\Omega = \{v, kv, kkv, kkkv, \ldots\}$.

10. Juhuslikult valitud inimese pikkus meetrites. Sel juhul võib võtta näiteks $\Omega = [0,\ 3]$ ning elemetaarsündmuste ruum on kontiinumi võimsusega.

11. Homne temperatuur. Sel juhul võib võtta näiteks $\Omega = [-100,\ 100]$ ning elemetaarsündmuste ruum on kontiinumi võimsusega.

12. Noolevise ruutmeetri suurusele seinale. Elementaarsündmus on punkt seinal, elementaarsündmuste ruumiks võib võtta $\Omega = [0,1] \times [0,1] \in \mathbb{R}^2$. Hulk Ω on kontiinumi võimsusega.

13. Aktsiahinna käitumine järgneva kuu jooksul. Sel juhul on elementaarsündmuseks aktsiahinna võimalik trajektoor. Formaalselt funktsioonid teatud ajalõigul, näiteks $[0,T]$, st

$$\Omega = \{f : [0,T] \to \mathbb{R}\} =: \mathbb{R}^{[0,T]}.$$

Nägime, et elementaarsündmused võivad olla väga erinevad objektid ("vapp", arv, vektor, vektorite hulk, trajektoor). Samuti võib olla väga erinev elementaarsündmuste hulga võimsus (näidetes $1-8$ lõplik, näites 9 loenduv, näidetes $10-13$ kontiinumi võimsusega). Tõenäosusteoorias üldiselt elemntaarsündmustele mingeid nõudeid ei seata, elementaarsündmused on lihtsalt mingi hulga Ω elemendid.

1.2.2 Sündmused

Sageli ei huvita meid mitte katsetulemus otseselt vaid ainult mingi konkreetse sündmuse toimumine (näiteks see, et aktsiahind oleks kuu aja pärast tõusnud vähemalt 10% või see, et täringuviskes tuleb paarisarv). Kui võimalikud katsetulemused – elementaarsündmused – on teada, on iga sündmus samastatav mingi elementaarsündmuste hulgaga. Tõenäosusteoorias vaadeldaksegi sündmuseid hulga Ω alamhulkadena.

Näited: Näited sündmustest eelmises näites toodud elementaarsündmuste hulgal.

1. Mündivise. Olgu $\Omega = \{\text{vapp, kiri}\}$. Sündmus $A = \{$ mündiviskel ei tule vapp $\}$ on üks kahest elementaarsünsmusest, st $A = \{$ kiri$\}$. Kui $\Omega = \{\text{vapp, kiri, serva peal}\}$, siis $A = \{\text{kiri}, \text{serva peal}\}$.

2. Täringuvise, $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. Sündmus $A = \{$ täringuviskel tuleb paarisarv $\} = \{2,4,6\}$.

3. Kaardipakk peale kaartide segamist. Elementaarsündmused on hulga $\{1,\ldots,K\}$ permutatsioonid, iga kaart on samastatud numbriga, pealmine kaart on permutatsioonis esimesel kohal. Sündmus $A = \{$ kaardipaki pealmine kaart on risti äss $\}$ on sellise permutatsioonide hulk kus esimesel kohal on risti ässale vastav number.

4. 3 mündiviset, $\Omega = \{(k,k,k),(k,k,v),(k,v,k),(v,k,k),(v,v,k),(v,k,v),(k,v,v),(v,v,v)\}$. Sündmus $A = \{$ vähemalt kahel korral tuli vapp $\} = \{(v,v,k),(v,k,v),(k,v,v),(v,v,v)\}$.

5. Tagasipanekuga urni mudel, järjestatud komponentidega elementaarsündmused,

$$\Omega = \big\{(a_1,\ldots,a_n) : a_i \in \{1,\ldots,M\}, \quad i = 1,\ldots,n\big\}.$$

Sündmus $A = \{$ teine võetud kuul on $M\} = \{(a_1,\ldots,a_n) \in \Omega : a_2 = M\}$. Sündmus $B = \{$võetakse üks kord kuul 1 ja ülejäänud korrad kuul $M\} = \{(a_i,\ldots,a_n) \in \Omega : a_i = 1, a_j = M, j \neq i, i = 1,\ldots,n\}$.

6. Tagasipanekuga urni mudel, järjestamata komponentidega elementaarsündmused.

$$\Omega = \{[a_1,\ldots,a_n] : a_1 \leq \cdots \leq a_n \quad a_i = 1,\ldots,M, \quad i = 1,\ldots,n\}.$$

Sündmus $A = \{$ võetakse vähemalt kaks M-kuuli $\} = \{[a_1,\ldots,a_n] \in \Omega : a_n = a_{n-1} = M\}$. Kuidas avaldub sündmus $\{$ võetakse täpselt kaks M-kuuli $\}$? Kas antud elementaarsündmuste ruumil on võimalik defineerida sündmust $\{$ teine võetud kuul on $M\}$? Avalda eelmises näites vaadeldud sündmus B.

7. Tagasipanekuta urni mudel, järjestatud komponentidega elementaarsündmused.

$$\Omega = \big\{(a_1,\ldots,a_n) : a_i \in \{1,\ldots,M\}, \quad a_k \neq a_l, k \neq l, \quad i = 1,\ldots,n\big\}.$$

Sündmus $A = \{$ kordagi ei võeta kuuli $M\} = \{(a_1,\ldots,a_n) \in \Omega : a_i \neq M, i = 1,\ldots,n\}$. Paneme tähele, et $\{$ võetakse vähemalt kaks korda kuul M $\} = \emptyset \subset \Omega$ on ka sündmus.

8. Tagasipanekuta urni mudel, järjestamata komponentidega elementaarsündmused.

$$\Omega = \{[a_1,\ldots,a_n] : a_1 < \cdots < a_n \quad a_i = 1,\ldots,M, i = 1,\ldots,n\}.$$

Avalda sündmus $A = \{$ kordagi ei võeta kuuli $M\}$? Kas järgmised väited on sündmused

   - $\{$ teine ja kolmas kord võetakse kuul $M\}$?
   - $\{$ teine kord võetakse kuul $M\}$?

9. Mündivise esimese vapi tulekuni, $\Omega = \{v, kv, kkv, kkkv, \ldots\}$. Sündmus $A = \{$ kulub vähemalt kolm viset $\} = \{kkv, kkkv, \ldots\}$.

10. Juhuslikult valitud inimese pikkus meetrites, $\Omega = [0,\ 3]$. Sündmus $A = \{$ pikkus on alla 1.70 $\} = [0, 1.70)$.

11. Homne temperatuur, $\Omega = [-100,\ 100]$. Avalda sündmus $\{$ homme on täpselt 0 kraadi $\}$.

12. Noolevise ruutmeetri suurusele seinale, $\Omega = [0,1] \times [0,1] \in \mathbb{R}^2$. Sündmus $\{$ nool lendab ülemisse veerandisse $\} = [0.5, 1] \times [0.5, 1]$.

13. Aktsiahinna käitumine järgneva kuu jooksul, $\Omega = \{f : [0, T] \to \mathbb{R}\}$. Avaldada sündmused:

   - { aktsiahind ei muutunud kordagi },
   - { aktsiahind oli kuu lõpus täpselt sama mis kuu alguses}.

Seega sündmus on hulk, täpsemalt elementaarsündmuste hulk ehk elementaarsündmuste ruumi alamhulk. Tühi hulk $\emptyset$ on ka alamhulk, seega on ka tühi hulk sündmus. Tühja hulka nimetame võimatuks sündmuseks. Kõige suurem sündmus (sisalduvusseose mõttes) on kogu elementaarsündmuste ruum Ω (kõigi elementaarsündmuste hulk). Seda nimetame kindlaks sündmuseks. Katse jooksul võib sündmus A toimuda või mitte toimuda. Sündmus toimub (antud katses), kui katse tulemus ω sisaldub hulgas A, st $\omega \in A$.

Tehted sündmustega. Et sündmused on hulgad, saab neile rakendada ka hulgateroeetilisi tehteid: ühend, ühisosa, täiend jne. Järgnev definitsioon annab neile tehetele tõenäosusteoreetilise interpretatsiooni.

Definitsioon 1.2.3
- *Sündmuste A ja B* **summaks** *nimetatakse sündmust $A \cup B$, mis tähendab sündmuse A, sündmuse B või mõlema toimumist.*
- *Sündmuste A ja B* **korrutiseks** *nimetatakse sündmust $A \cap B$, mis tähendab nii sündmuse A kui ka B toimumist.*
- *Sündmuste A ja B* **vaheks** *nimetatakse sündmust $A \setminus B$, mis tähendab sündmuse A toimumist, kuid B mittetoimumist.*
- *Sündmuste A ja B* **sümmmeetriliseks vaheks** *nimetatakse sündmust $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, mis tähendab sündmuse A ja B vahe või B ja A vahe toimumist.*
- *Sündmuse A* **vastandsündmuseks** *$\bar{A}$ (tähistatakse ka A^c) nimetatakse sündmuse A mittetoimumist, $\bar{A} = \Omega \setminus A$.*

Definitsioon 1.2.4 *Kui $A \cap B = \emptyset$, siis sündmusi A ja B nimetatakse* **teineteist välistavateks**. *Kui $A_1, A_2, \ldots$ on sellised sündmused, et $A_i \cap A_j = \emptyset$, iga $i \neq j$ korral, siis ütleme, et need sündmused on* **üksteist välistavad.**

Toodud definitsioonid on väga loogilised ning igati kooskõlas intuitsiooniga: elementaarsündmused on teineteist välistavad, iga sündmus on sinna kuuluvate elementaarsündmuste summa. See tähendab, et sündmus toimub, kui toimub (ainult) üks sinna kuuluvatest elementaarsündmustest; sündmuste korrutis toimub kui toimub üks neist elementaarsündmustest, mis kuulub mõlemasse sündmusesse; sündmuse vastandsündmus toimub, kui toimub üks neist elementaarsündmustest, mis ei kuulu antud sündmusesse jne.

Analoogiliselt defineeritakse enam kui kahe sündmuse summa ja korrutis. Seega, kui $A_1, A_2, \ldots$ on sündmused, on nende korrutis $\cap_i A_i$ ning nende summa $\cup_i A_i$. Korrutise toimumine tähendab kõikide sündmuste A_i toimumist, summa tähendab vähemalt ühe toimumist, kehtib $\cap_i A_i \subseteq \cup_i A_i$. Siinkohal on paslik meelde tuletada hulgateooriast tuttavad seosed

$$(\cup_i A_i) \cap B = \cup_i (A_i \cap B), \quad (\cap_i A_i) \cup B = \cap_i (A_i \cup B)$$

samuti nn DeMorgani reeglid:

$$\overline{(\cup_i A_i)} = \cap_i \bar{A}_i, \quad \overline{(\cap_i A_i)} = \cup_i \bar{A}_i.$$

On selge, et ülaltoodud seosed kehtivad ka siis, kui sündmusi on mitteloenduv hulk.

1.3 Tõenäosus ja tõenäosusruum

Intuitiivselt on selge, et sündmuse A tõenäosus on teatav A tõepära iseloomustav arv. Tähistame selle arvu $\mathbf{P}(A)$. On selge, et $0 \leq \mathbf{P}(A) \leq 1$, st tõenäosus ei saa olla negatiivne ega suurem ühest. Samuti on loogiline eeldada, et tõenäosus on defineeritud igal sündmusel, kusjuures kindla sündmuse Ω tõenäosus on 1 ning teineteist välistavate sündmuste A ja B summa tõenäosus on A ja B tõenäosuste summa: kui $A \cap B = \emptyset$, siis $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$. Viimasest nõudest järeldub, et kui A, B, C on üksteist välistavad, siis $\mathbf{P}(A \cup B \cup C) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C)$. Tõepoolest, kui A, B, C on üksteist välistavad, siis on ka $(A \cup B)$ ja C teineteist välistavad, millest saame

$$\mathbf{P}(A \cup B \cup C) = \mathbf{P}\big((A \cup B) \cup C\big) = \mathbf{P}(A \cup B) + \mathbf{P}(C) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C).$$

Jätkates seda arutelu saame, et analoogiline nõue peab kehtima ka lõpliku hulga üksteist välistavate sündmuste korral:

$$\text{kui } A_1, \ldots, A_n \text{ on üksteist välistavad, siis } \mathbf{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \mathbf{P}(A_1) + \cdots + \mathbf{P}(A_n) \tag{1.2}$$

Seega nõue – kahe teineteist välistava sündmuse summa tõenäosus on nende tõenäosuste summa – on ekvivalentne seosega (1.2). Tihti tuleb meil leida loenduva hulga üksteist välistavate sündmuste ühendi tõenäosust ning sellisel juhul on loomulik eeldada, et (1.2) kehtib ka loenduva hulga üksteist välistavate sündmuste korral:

$$\text{kui } A_1, A_2 \ldots \text{ on üksteist välistavad, siis } \mathbf{P}\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i). \tag{1.3}$$

Võtame nüüd ülaltoodud intuitiivse arutelu kokku: tõenäosus peaks igale sündmusele A seadma vastavusse arvu $\mathbf{P}(A)$ nii, et on rahuldatud järgmised nõuded (aksioomid):

1. $\mathbf{P}(A) \geq 0$;
2. $\mathbf{P}(\Omega) = 1$;
3. kui $A_1, A_2 \ldots$ on üksteist välistavad, st $A_i \cap A_j = \emptyset$ kui $i \neq j$, siis

$$\mathbf{P}\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i).$$

Oletame, et meil on defineeritud tõenäosus, mis rahuldab neid aksioome. Olgu $A_1 = \Omega$, $\emptyset = A_2 = A_3 = A_4 = \cdots$. Sellisel juhul on sündmused $A_1, A_2 \ldots$ on üksteist välistavad (miks?), nende ühend on Ω. Kolmandast ja teisest aksioomist saame

$$1 = \mathbf{P}(\Omega) = \mathbf{P}\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i) = \mathbf{P}(\Omega) + \mathbf{P}(\emptyset) + \mathbf{P}(\emptyset) + \cdots = 1 + \sum_{i=2}^{\infty} \mathbf{P}(\emptyset).$$

Sellest järeldub, et $\sum_{i=2}^{\infty} \mathbf{P}(\emptyset) = 0$, millest järeldub, et $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$ ehk võimatu sündmuse tõenäosus on 0. Igati loogiline, kas pole? Nüüd on kerge näha, et kehtib ka (1.2): olgu $A_1, \ldots, A_n$ üksteist välistavad sündmused. Defineerime $\emptyset = A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots$. Siis $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \cup_{i=1}^{n} A_i$, millest (1.3) tõttu

$$\mathbf{P}\big(\cup_{i=1}^{n} A_i\big) = \mathbf{P}\big(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i) = \mathbf{P}(A_1) + \cdots \mathbf{P}(A_n) + \sum_{i=n+1}^{\infty} \mathbf{P}(\emptyset) = \mathbf{P}(A_1) + \cdots \mathbf{P}(A_n).$$

Seega (esimese kahe aksioomi olemasolul) järeldub tingimusest (1.3) tingimus (1.2), kuid vastupidine üldiselt mitte.

1.3.1 Diskreetne tõenäosus

Lõplik elementaarsündmuste ruum

Vaatleme korraks erijuhtu, mil elementaarsündmuste ruum on lõplik, st $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$. Olgu $p : \Omega \mapsto [0,1]$ funktsioon, mis rahuldab järgmist tingimust:

$$\sum_{\omega} p(\omega) = \sum_{i=1}^{N} p(\omega_i) = 1.$$

Seega p seab igale elementaarsündmusele ω_i vastavusse mittenegatiivse arvu $p_i := p(\omega_i)$, nende arvude summa on 1. Selline funktsioon on esitatav tabelina

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \omega_1 & \omega_2 & \cdots & \omega_N \\ \hline p_1 & p_2 & \cdots & p_N \end{array}.$$

Funktsiooni p kaudu saab igale Ω alamhulgale $A = \{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_k}\}$ vastavusse seada tõenäosuse $\mathbf{P}(A)$ järgmiselt

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega) = \sum_{j=1}^{k} p(\omega_{i_k}) = \sum_{j=1}^{k} p_{i_k}. \tag{1.4}$$

On lihtne veenduda, et nii defineeritud tõenäosus rahuldab ülaltoodud kolme aksioomi. Siin kolmanda aksioomi (1.3) võib asendada nõudega (1.2) sest sündmusi on lõplik hulk. Siinkohal pane tähele: funktsiooni p argumendid on ainult elementaarsündmused ω_i ehk hulga Ω elemendid. Tõenäosuse $\mathbf{P}$ argumendid on aga kõik sündmused ehk hulga Ω alamhulgad. Antud juhul on kõik Ω alamhulgad sündmused ja seega $\mathbf{P}$ on argumendid kõik Ω alamhulgad. Formaalselt siis

$$p : \Omega \mapsto [0,1], \text{ kuid } \mathbf{P} : 2^{\Omega} \mapsto [0,1].$$

Muidugi on ka elementaarsündmus (ühepunktiline) alamhulk ja nii on elementaarsündmustel p ja $\mathbf{P}$ võrdsed: $p(\omega_i) = \mathbf{P}(\{\omega_i\})$ iga $i = 1, \ldots, N$ korral. Samas määrab funktsioon p seose (1.13) kaudu üheselt kujutise $\mathbf{P}$: teades elementaarsündmuste tõenäosusi, teame ka teiste sündmuste tõenäosusi. Nii öeldaksegi, et $\mathbf{P}$ on antud funktsiooniga p (või sellele vastava tabelina). Juhul kui elementaarsündmuste ruum on fikseeritud, on $\mathbf{P}$ üksüheses vastavuses vektoriga $(p_1, \ldots, p_N)$.

Klassikaline tõenäosus. Tihti on loomulik eeldada, et elementaarsündmused on võrdtõenäolised. Sellisel juhul on $p_i = \frac{1}{N}$, tabel

ω_1	ω_2	$\cdots$	ω_N
$\frac{1}{N}$	$\frac{1}{N}$	$\cdots$	$\frac{1}{N}$

Seosest (1.13) saame nüüd, et iga sündmuse $A \subset \Omega$ korral

$$\mathbf{P}(A) = \frac{|A|}{N},$$

kus $|A|$ on hulga A võimsus (elementide arv). Seega võrtõenäoliste elementaarsündmuste korral on sündmuse tõenäosus võrdne temasse kuuluvate elementaarsümndmuste proportsiooniga. Näiteid: (ausa) mündi vise, täringuvise, urnist välja võetud kuul jne. Võrdsed elementaarsündmused vastavad enamasti "igapäevasele"ettekujutusele juhuslikkusest. Seetõttu nimetatakse seda ka **klassikaliseks tõenäosuseks**. Näiteks kui urnis on viis valget, kolm punast ja kaks musta kuuli, siis lauses "tõenäosus, et juhuslikult valitud kuul on punane, on $\frac{3}{10}$"peetakse vaikimisi silmas just võrdtõenäolisis elementaarsündmusi. Matemaatiliselt pole ülaltoodud lause korrektne, sest juhuslikkus ei tähenda ilmtingimata võrdtõenäolisi elementaartsündmusi. Näiteks võib kuulide võtja ignoreerida musti kuule ja võtta urnist võrdse tõenäosusega kõiki teisi värve. Ka sellisel juhul valitakse kuule juhuslikult, kuid tõenäosus, et juhuslikult valitud kuul on punane, on nüüd $\frac{3}{8}$". Kui urnist võetakse vaid punaseid kuule, on kuulide valik ikkagi juhuslik, kuid meid huvitava sündmuse tõenäosus on nüüd 1. Enamus tõenäosusega seotud paradokse (ka sissejuhatuses mainitud Bertrandi paradoks) tuleneb mõiste "juhuslikkus"mitmeti või vääriti interpretatsioonist. Paradoksaalsus kaob, kui on konkreetselt defineeritud $\mathbf{P}$.

Ülaltoodule vaatamata, on klassikaline tõenäosus praktikas sagesasti ette tulev olukord. Tihti seoses urni mudelitega. Vaatleme tagasipanekuta urni mudelit. Teame, et järjestatud komponentidega elementaarsündmuste korral on M kuulist n valituks V_M^n võimalust. Tihti on loomulik eeldada, et kõik need võimalised on võrdtõenäolised. See on klassikalise tõenäosuse juht, iga elementaarsündmuse $(a_1, \dots, a_n)$ tõenäosus on $(V_M^n)^{-1}$. Sellisel juhul on võrdtõenäolised ka järjestamata komponentidega elementaarsündmused, sest igale elementaarsündmusele $[a_1, \dots, a_n]$, kus $a_1 < \cdots < a_n$ vastab täpselt $n!$ järjestatud komponentidega elementaarsündmust. Seega iga elementaarsündmuse $[a_1, \dots, a_n]$ tõenäosus on $n!(V_M^n)^{-1} = (C_M^n)^{-1}$.
Oletame nüüd, et urnis olevast M kuulist on M_1 kuuli mustad ja M_2 kuuli valged, $M_1+M_2 = M$. Vaatleme sündmust { väljavõetud n kuulist esimesed n_1 on mustad järgmised n_2 valged } $(n_1 + n_2 = n)$. See sündmus eeldab järjestust, seetõttu tuleb meil vaadelda järjestatud elementaarsündmusi. Esimese n_1 musta kuuli valikuks on $V_{M_1}^{n_1}$ võimalust, viimase n_2 kuuli valikuks $V_{M_2}^{n_2}$ võimalust, kokku on vaadeldavas sündmuses $V_{M_1}^{n_1} V_{M_2}^{n_2}$ (järjestatud) elementaarsündmust. Täpselt sama palju elementaarsündmusi on sündmuses { esimesed n_2 kuuli on valged ja viimased n_1 kuuli mustad } või sündmuses { esimene kuul on must, teine valge, kolmas kuni $n_1 + 1$-me must ja ülejäänud $n_2 - 1$ valged }. Seega sündmuses { välja võetud n kuulist n_1 on mustad ja n_2 valged (järjestus pole oluline) } on

$$\frac{n!}{n_1!n_2!} V_{M_1}^{n_1} V_{M_2}^{n_2}$$

järjestatud elementaarsündmust, sest $\frac{n!}{n_1!n_2!}$ võimalike mustade ja valgete kuulide paigutuste arv. Viimases sündmuses pole järjestus oluline, seega võime vaadelda ka järjestamata elementaarsündmusi. Sellisel juhul kuuluvad sündmusesse need kombinatsioonid M kuulist n-kaupa, kus on

n_1 musta ja n_2 valget kuuli. Mustade kuulide valikuks on $C_{M_1}^{n_1}$ kombinatsiooni, valgete kuulide valikuks $C_{M_2}^{n_2}$ kombinatsiooni, kokku on kombinatsioone $C_{M_1}^{n_1} C_{M_2}^{n_2}$.
Saadud valemeid on kerge üldistada rohkem kui kahele värvile. Tõepoolest, olgu M kuulist M_1 ühte värvi, M_2 teist värvi, M_3 kolmandat värvi jne, kokku olgu k värvi: $M_1 + \cdots + M_k = M$. Vaateleme sündmust { välja võetud n kuulist esimesed n_1 on esimest värvi, järgmised n_2 järgmist värvi jne $(n_1 + \cdots + n_k = n)$ }. Sellises sündmuses on $V_{M_1}^{n_1} \cdots V_{M_k}^{n_k}$ (järjestatud) elementaarsündmust. Sündmuses { välja võetud n kuulist n_i on i-ndat värvi , $i = 1, \ldots, k$} on seega

$$\frac{n!}{n_1! \cdots n_k!} V_{M_1}^{n_1} \cdots V_{M_k}^{n_k} \tag{1.5}$$

järjestatud ning

$$C_{M_1}^{n_1} \cdots C_{M_k}^{n_k} \tag{1.6}$$

järjestamata elementaarsündmust.

Vaatleme nüüd jällegi olukorda, kus urnis on A musta ja B valget kuuli $(A + B = M)$. Neist n kuuli välja võtmine on otsekui kuulide jagamine kahte rühma: väljavõetud kuulid ja ülejäänud. Jagame nüüd kuule l rühma nii, et igas rühmas oleks m_i $(i = 1, \ldots, l)$ kuuli. See tähendab, et kõigepealt võtame m_1 kuuli ja paneme need kõrvale, seejärel m_2 kuuli, paneme need kuskile mujale jne $(m_1 + \cdots + m_l = M)$. Vaatleme sündmust { esimesest välja võetud m_1 kuulist a_1 esimest on mustad, ülejäänud $m_1 - a_1$ valged, teisest väljavõetud m_2 kuulist a_2 esimest on mustad, ülejäänud $m_2 - a_2$ valged, jne}. Sisuliselt tähendab see M kuuli kõivõimalikke selliseid järjestusi, kus mustade ja valgete positsioon on teada. Selliseid järjestusi on $A!B!$. Vaatleme nüüd sündmust {esimese m_1 kuuli seas on a_1 musta (järjekord pole oluline), teise m_2 kuuli seas on a_2 musta jne}. Esimese a_1 musta kuuli paigutuseks m_1 kuuli raames on $C_{m_1}^{a_1}$ võimalust, teise a_2 musta kuuli paigutuseks m_2 kuuli raames on $C_{m_2}^{a_2}$ võimalust jne. Seega on vaadeldavas sündmuses

$$C_{m_1}^{a_1} \cdots C_{m_l}^{a_l} A!B! = \frac{m_1!}{a_1!(m_1 - a_1)!} \cdots \frac{m_l!}{a_l!(m_l - a_l)!} A!B! \tag{1.7}$$

järjestatud elementaarsündmust $(a_1, \ldots, a_M)$. Järjestamata komponentidega elementaarsündmused antud juhul on M kuuli jagamiste arv l rühma suurustaga $m_1, \ldots, m_l$, järjestusi arvestamata. Selliseid paigutusi on

$$\frac{M!}{m_1! \cdots m_l!}$$

tükki. Vaadeldavasse sündmusesse kuuluvad järjestamata komponentidega elementaarsündmused on sellised kuulide paigutused, et esimesse rühma kuulub a_1 musta, teise a_2 musta jne. Mustade kuulide paigutusi l rühma on $\frac{A!}{a_1! \cdots a_l!}$, valgete paigutusi $\frac{B!}{(m_1 - a_1)! \cdots (m_l - a_l)!}$, kokku on sündmusesse kuuluvaid (järjestamata) elementaarsündmusi

$$\frac{A!}{a_1! \cdots a_l!} \frac{B!}{(m_1 - a_1)! \cdots (m_l - a_l)!}. \tag{1.8}$$

Nüüd võime lahendada klassikalisi tõenäosusülesandeid.

Näited (klassikaline tõenäosus):

1. Leida tõenäosus, et peale kaardipaki (52) segamist on pealmine kaart:

   a) risti äss;

   b) äss.

   Elementaarsündmused on permutatsioonid 52-st elemendist.
   a) Sündmusesse kuuluvad need permutatsioonid, kus esimene kaart on risti äss (fikseeritud). Neid on $1 \cdot 51!$ tükki. Sündmuse tõenäosus seega

   $$\frac{51!}{52!} = \frac{1}{52}.$$

   Võib arutleda ka nii. Olgu A_i on sündmus, et esimene kaart on i. Sündmused A_i on võedtõenäolised ja üksteist välistavad, kehtib $\Omega = \cup_{i=1}^{52} A_i$. Seega $\mathbf{P}(A_i) = \frac{1}{52}$.
   b) Tõenäosus on $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.

2. Urnis on 6 valget ja 5 musta kuuli. Võetakse välja 3 kuuli. Leida tõenäosus, et

   a) Välja võetud kuulid on järjekorras: must, valge, must;

   b) välja võetud kuulide seas on kaks musta ja üks valge.

   a) Esimese tõenäosuse leidmiseks tuleb kasutada järjestatud elementaarsündmusi. Neid on kokku $V_{11}^3 = 11 \cdot 10 \cdot 9 = 990$. Vaadeldavasse sündmusesse kuuluvad elementaarsündmused on need variatsioonid, kus esimene on must, teine valge ja kolmas must. Neid on $V_5^2 V_6^1 = 5 \cdot 4 \cdot 6 = 120$. Seega otsitav tõenäosus on

   $$\frac{120}{990} = \frac{4}{33}.$$

   b) Teise tõnäosuse leidmiseks võime kasutada nii järjestatud kui ka järjestamata komponentidega elementaarsündmusi. Järjestatud elementaarsündmuste korral on sündmusesse kuuluvaid elementaarsündmusi (valem (1.5)) $C_3^2 \cdot 120 = 360$ otsitav tõenäosus on seega $\frac{360}{990} = \frac{4}{11}$.
   Järjestamata komponentidega elementaarsündmuste korral on nende koguarv C_{11}^3, sündmusesse kuuluvate elementaarsündmuste arv (valem (1.5)) on $C_6^1 C_5^2$. Seega tõenäosus on

   $$\frac{C_6^1 C_5^2}{C_{11}^3} = \frac{4}{11}.$$

3. Ülaltoodud ülesanne b) on erijuht üldisest ülesandest: olgu M kuulist M_1 ühte värvi, M_2 teist värvi, M_3 kolmandat värvi jne, kokku olgu k värvi: $M_1 + \cdots + M_k = M$. Leida tõenäosus, et välja võetud n kuulist n_1 on esimest värvi, n_2 teist värvi jne ($n_1 + \cdots + n_k = n$). Järjestatud elementaarsündmuste korral on see tõenäosus (valem (1.5))

   $$\frac{n!}{n_1! \cdots n_k!} \frac{V_{M_1}^{n_1} \cdots V_{M_k}^{n_k}}{V_M^n} = \frac{n!}{n_1! \cdots n_k!} \frac{\frac{M_1!}{(M_1-n_1)!} \cdots \frac{M_k}{(M_k-n_k)!}}{\frac{M!}{(M-n)!}} = \frac{\frac{M_1!}{(M_1-n_1)!n_1!} \cdots \frac{M_k}{(M_k-n_k)!n_k!}}{\frac{M!}{(M-n)!n!}}$$
   $$= \frac{C_{M_1}^{n_1} \cdots C_{M_k}^{n_k}}{C_M^n} = \frac{C_{M_1}^{n_1} \cdots C_{M_k}^{n_k}}{C_{M_1+\cdots M_k}^{n_1+\cdots+n_k}}.$$

Järjestamata elementaarsündmuste korral on see tõenäosus sama (valem (1.6)):

$$\frac{C_{M_1}^{n_1}\cdots C_{M_k}^{n_k}}{C_M^n}=\frac{C_{M_1}^{n_1}\cdots C_{M_k}^{n_k}}{C_{M_1+\cdots M_k}^{n_1+\cdots+n_k}}. \tag{1.9}$$

4. Viieliikmeline komisjon valitakse juhuslikult 6 mehe ja 9 naise seast. Leida tõenäosus, et komisjoni satub 3 meest ja 2 naist. Vastavalt valemile (1.9) on see tõenäosus

$$\frac{C_6^3C_9^2}{C_{15}^5}=\frac{240}{1001}.$$

5. Leida tõenäosus, et bridzikäes on:

a) 10 ärtut, 2 ristit ja 1 ruutu,

b) täpselt 10 ärtut;

c) vähemalt 10 ärtut;

d) 10 ühest mastist kaarti, ülejäänud teistest mastidest;

e) teine kaart risti äss;

f) risti äss;

a) Valem (1.9):

$$\frac{C_{13}^{10}C_{13}^2C_{13}^1C_{13}^0}{C_{52}^{13}}.$$

b) Valem (1.9):

$$\frac{C_{13}^{10}C_{39}^3}{C_{52}^{13}}.$$

c) Sündmus $A=\{$ käes on vähemalt 10 ärtut $\}$ avaldub summana $A=A_{10}\cup A_{11}\cup A_{12}\cup A_{13}$, kus A_i on sündmus, et käes on täpselt i ärtut. Need sündmused on üksteist välistavad, mistõttu

$$\mathbf{P}(A)=\sum_{i=10}^{13}\mathbf{P}(A_i)=\sum_{i=10}^{13}\frac{C_{13}^iC_{39}^{13-i}}{C_{52}^{13}}.$$

d) Sündmus $A=\{$ käes on 10 ühest mastist kaarti, ülejäänud tesitest mastidest $\}$ avaldub summana $A=A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4$, kus A_1 on sündmus, et käes on täpselt 10 ärtut, A_2 on sündmus, et käes on täpselt 10 pada, A_3 on sündmus, et käes on täpselt 10 ruutut ja A_4 on sündmus, et käes on täpselt 10 ristit. Need sündmused on üksteist välistavad, mistõttu

$$\mathbf{P}(A)=\mathbf{P}(A_1)+\mathbf{P}(A_2)+\mathbf{P}(A_3)+\mathbf{P}(A_4)=4\frac{C_{13}^{10}C_{39}^3}{C_{52}^{13}}.$$

e) Siin tuleb kasutada järjestatud elementaarsündmusi. Esimese kaardi valikuks on 51 võimalust, teise kaardi valikuks 1, 3.-nda kaardi valikuks 50 jne. Viimase, 13.-nda kaardi valikuks on 40 võimalust. Kokku on V_{51}^{12} võimalust. Otsitav tõenäosus on seega

$$\frac{V_{51}^{12}}{V_{52}^{13}}=\frac{51\cdots 40}{52\cdots 40}=\frac{1}{52}.$$

f) Valem (1.9):

$$\frac{C_1^1 C_{51}^{12}}{C_{52}^{13}} = \frac{1 \cdot \frac{51!}{12!39!}}{\frac{52!}{13!39!}} = \frac{13}{52}.$$

Teine võimalus: sündmus $A = \{$ käes on risti äss $\}$ avaldub summana:

$$A = \cup_{i=1}^{13} A_i,$$

kus A_i on sündmus, et risti äss tuleb i-nda kaardina. Sündmused on teineteist välistavad ja võrdse tõenäosusega $\frac{1}{52}$. Seega $\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^{13} \mathbf{P}(A_i) = \frac{13}{52}$.

6. Leida tõenäosus, et pokkerikäes (5 kaarti 52-st) on:

   a) kolm ässa ja kaks üheksat;

   b) maja (2+3);

   c) 2,3,4,5,6 kuid mitte ühest mastist;

   d) rida;

   e) mastirida;

   f) mast (viis kaarti ühest mastist kuid mitte mastirida)

   a) valem (1.9):

$$\frac{C_4^2 C_4^3 C_{44}^0}{C_{52}^5} = \frac{6 \cdot 4}{C_{52}^5} = \frac{24}{C_{52}^5} \approx 0.000009.$$

b) Majas on 13 võimalust paariks ja antud paari korral 12 võimalust kolmikuks. Iga paari+kolmiku saamise tõenäosus on meil teada, seega maja saamise tõenäosus on

$$13 \cdot 12 \cdot \frac{24}{C_{52}^5} \approx 0.0014.$$

c) Leiame kõigepealt need kombinatsioonid, kus on 2,3,4,5,6 sõltumata mastist. Neid on 4^5 (formaalselt $C_4^1 C_4^1 C_4^1 C_4^1 C_4^1 C_{32}^0$) neist 4 kombinatsiooni on kaardid ühest mastist. Seega otsitav tõenäosus (valem (1.9)) on

$$\frac{(4^5 - 4)}{C_{52}^5} \approx 0.00039.$$

d) Väikseim rida on Ä,2,3,4,5, suurim 10,P,E,K, Ä. Kokku on 10 võimalust. Seega rea tõenäosus on

$$10 \frac{(4^5 - 4)}{C_{52}^5} \approx 0.0039.$$

e) Mastiridu ärtu mastist on 10. Mastiridu kokku seega $4 \cdot 10 = 40$. Mastirea saamise tõenäosus

$$\frac{40}{C_{52}^5} \approx 0.000015.$$

f) Nende kombinatsioonide arv, kus kõik viis kaarti on ärtud (olenemata nende väärtustest) on C_{13}^5 neist 10 kombinatsiooni vastab mastireale. Seega kombinatsioone, et 5 kaarti on ärtud, kuid mitte mastirida on $C_{13}^5 - 10$. Masti, kuid mitte mastirea saamise tõenäosus on seeega

$$\frac{4(C_{13}^5 - 10)}{C_{52}^5} = \frac{4(1287 - 10)}{2598960} \approx 0.0019.$$

7. Olgu urnis on A musta ja B valget kuuli, $A + B = M$. Need kuulid jagati l rühma nii, et i-ndas rühmas on m_i kuuli. Leida tõenäosus, et i-ndas rühmas on täpselt a_i musta kuuli.
Vaatleme järjestatud komponentidega elementaarsündmusi. Sündmusesse kuulub (valem (1.7))
$$C_{m_1}^{a_1} \cdots C_{m_l}^{a_l} A!B! = \frac{m_1!}{a_1!(m_1 - a_1)!} \cdots \frac{m_l!}{a_l!(m_l - a_l)!} A!B!$$
elementaarsündmustt. Kokku on elementaarsündmusi $M!$. Tõenäosus seega
$$\frac{C_{m_1}^{a_1} \cdots C_{m_l}^{a_l} A!B!}{M!} = \frac{C_{m_1}^{a_1} \cdots C_{m_l}^{a_l}}{C_M^A}. \tag{1.10}$$
Täpselt sama tõenäosuse saame kui vaatleme järjestamata elementaarsündmusi (valem (1.8). Paneme tähele, et valemid (1.9) ja (1.10) on väga sarnased. Tõepoolest, valemini (1.10) jõuame ka järgmiselt arutledes: värvime M kuuli l värvi: esimesed m_1 kuuli ühte värvi, järgmised m_2 kuuli teist värvi jne. Võtame juhuslikult A kuuli. Tõenäosus, et neist A kuulist a_i on i-ndat värvi, on valemi (1.9) kohaselt (1.10). Kuid see on just see tõenäosus, mida otsime.

8. 52 kaarti jagati välja 4 mängija vahel. Leida tõenäosus, et

   a) Esimene mängija saab 4 ärtut ja tema partner saab ülejäänud ärtud;

   b) ühel mängijal on neli ärtut, teistel 3;

   c) üks mängija saab 13 ärtut;

   d) iga mängija saab ühe ässa.

   a) Ärtusi on 13, ülejäänud kaarte 39. Vastavalt valemile (1.10) on otsitav tõenäosus:
$$\frac{C_{13}^4 C_{13}^0 C_{13}^9 C_{13}^0}{C_{52}^{13}}.$$
   b) Tõenäosus, et esimesel mängijal on 4 ja teistel 3 ärtut on
$$\frac{C_{13}^4 C_{13}^3 C_{13}^3 C_{13}^3}{C_{52}^{13}},$$
   otsitav tõenäosus on
$$4\frac{C_{13}^4 C_{13}^3 C_{13}^3 C_{13}^3}{C_{52}^{13}}.$$
   c) Tõenäosus, et esimene mängija saab 13 ärtut on
$$\frac{C_{13}^{13} C_{13}^0 C_{13}^0 C_{13}^0}{C_{52}^{13}} = \frac{1}{C_{52}^{13}},$$
   otsitav tõenäosus on seega
$$\frac{4}{C_{52}^{13}}.$$
   d) Vastavalt valemile (1.10) on see tõenäosus
$$\frac{C_{13}^1 C_{13}^1 C_{13}^1 C_{13}^1}{C_{52}^4} = \frac{13^4}{C_{52}^4}.$$

9. 20 noormeest ja 20 neidu jagati juhuslikult 20-ks paariks. Leida tõenäosus:

   a) esimesed 10 paari on poisid ja ülejäänud 10 paari tüdrukud;

   b) ükski paar pole segapaar

   c) segapaare on täpselt $2i$, $i = 1, \dots, 10$.

   a) Siin 40 inimest jagati 20-ks paariks. Vastavalt valemile (1.10) saame, et tõenäosus on

$$\frac{(C_2^2)^{10}(C_2^0)^{10}}{C_{40}^{20}} = \frac{1}{C_{40}^{20}}.$$

   b) Võimalusi poiste ja tüdrukute tubade paigutuseks on C_{20}^{10} (alates 10 poiste tuba ja siis 10 tüdrukute tuba, lõpetades 10 tüdrukute tuba ja siis 10 poiste tuba). Iga sellise paigutuse korral on tõenäosus $\frac{1}{C_{40}^{20}}$. Otsitav tõenäosus on seega

$$\frac{C_{20}^{10}}{C_{40}^{20}} = \frac{(20!)^3}{(10!)^2 40!}.$$

   c) kodus.

Vaatleme korraks ka tagasipanekuga urni mudelit. Olgu urnis jälle M kuuli. Teame, et n kuuli tagasipanekuga väljavõtmise korral on M^n järjestatud võimalust. Tihti on loomulik eeldada, et need võimalused on võrdtõenäolised (urnist võetakse "pimesi"kuul pannakse tagasi, võetakse uus jne). Ent (erinevalt tagasipanekuta mudelist) sellisel juhul pole enam võrdtõenäolised järjestamata komponentidega elementaarsündmused: tõepoolest, näiteks elementaarsündmisele $[1, \dots, 1]$ vastab vaid üks järjestatud komponentidega elementaarsündmus, kuid näiteks elementaarsündmusele $[1, \dots, 1, 2]$ vastab n järjestatud komponentidega elementaarsündmust (millised?). Vaata ka näide 4 allpool.
Olgu urnis jällegi k erinevat värvi kuuli (vastavalt $M_1, \dots, M_k, M_1 + \dots + M_k = M$). Vaatleme sündmust: $\{n$ väljavõetud kuulist esimesed n_1 on 1-st värvi, järgmised n_2 teist värvi jne $\}$. Selles sündmuses on $M_1^{n_1} \cdots M_k^{n_k}$ (järjestatud komponentidega) elementaarsündmust. Nende k värvi paigutuseks väljavõetud n kuuli seas on $\frac{n!}{n_1! \cdots n_k!}$ paigutust, seega sündmuses $\{n$ väljavõetud kuulist n_1 on 1-st värvi, n_2 teist värvi jne $\}$ on

$$\frac{n!}{n_1! \cdots n_k!} M_1^{n_1} \cdots M_k^{n_k} \tag{1.11}$$

(järjestatud komponentidega) elementaarsündmust. Mitu (järjestatud komponentidega) elementaarsündmust on sündmuses $[a_1 \le a_2 \le \dots \le a_n]$? Olgu erinevate a_i-de (erinevate väljavõetud kuulide) arv k ning väljavõetud kuulide numbrid $j_1, \dots, j_k$. Olgu j_i-nda väljavõetud kuuli korduste arv n_i ($n_1 + \dots + n_k = n$). Näiteks $[2, 2, 5, 7, 7, 10]$ korral $k = 4$, $j_1 = 2, j_2 = 5, j_3 = 7, j_4 = 10$, $n_1 = 2, n_2 = 1, n_3 = 2, n_4 = 1$. Sündmus $[a_1 \le a_2 \le \dots \le a_n]$ on seega järgmine: $\{$ välja võetakse n_1 korda kuuli j_1, n_2 korda kuuli j_2, $\dots$, n_k korda kuuli $j_k\}$. Vaadeldes iga kuuli omaette värvina, saame valemist (1.11), et sellises sündmuses on

$$\frac{n!}{n_1! \cdots n_k!}$$

kuuli.

Näited (klassikaline tõenäosus):

1. Olgu urnis jällegi k erinevat värvi kuuli (vastavalt $M_1, \ldots, M_k, M_1 + \cdots + M_k = M$). Tagasipanekuga võetakse välja n kuuli. Tõenäosus, et i-ndat värvi kuuli võetakse välja täpselt n_i korda ($n_1 + \cdots + n_k = n$, järjekord pole oluline) on leitav nn **multinomiaaljaotuse valemiga**
$$\frac{n!}{n_1! \cdots n_k!} \frac{M_1^{n_1} \cdots M_k^{n_k}}{M^n} = \frac{n!}{n_1! \cdots n_k!} \Big(\frac{M_1}{M}\Big)^{n_1} \cdots \Big(\frac{M_k}{M}\Big)^{n_k}. \tag{1.12}$$

2. Ruumis on n inimest. Ignoreerides liigaastaid leida tõenäosus, et:

   a) n_1 inimest on sündinud jaanuaris, n_2 inimest märtsis ja n_3 inimest novembris, $n_1 + n_2 + n_3 = n$;

   b) jaanuaris on sündinud täpselt n_1 inimest;

   c) kahel inimesel ei ole samal päeval sünnipäev.

   Siin kuulidena võib vaadelda aastas olevaid päevi, kuule on kokku seega 365. Neist 31 on jaanuari päevad, 28 veebruari päevad jne. seega vastavad tõenäosused:
   a)
$$\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!} (\frac{31}{365})^{n_1} (\frac{31}{365})^{n_2} (\frac{30}{365})^{n_2}.$$
   b)
$$C_n^{n_1} (\frac{31}{365})^{n_1} (\frac{334}{365})^{n-n_1}.$$
   c) Esimese kuuli (sünnipäeva) valikuks on 365 võimalust, pärast selle fikseerimist on teise kuuli (sünnipäeva) valikuks on 364 valikut jne. Nii on kokku V_{365}^n valikut ning otsitav tõenäosus seega
$$\frac{V_{365}^n}{(365)^n} = \frac{365 \cdot 364 \cdots (364 - n + 1)}{(365)^n}.$$
   Selgub, et kui $n \geq 23$, siis see tõenäosus on väiksem kui 0.5. Kui $n = 50$, on see tõenäosus ligikaudu 0.97.

3. Eeldades, et poiste ja tüdrukute sündimise tõenäosus on võrdne, leida tõenäosus, et kuuest sündinud lapsest:

   a) kaks last on poisid ja ülejäänud tüdrukud;

   b) vähemalt neli last on tüdrukud.

   a)
$$C_6^2 (\frac{1}{2})^2 (\frac{1}{2})^4 = \frac{15}{2^6} = \frac{15}{64} = 0.234375.$$
   b)
$$(C_6^2 + C_6^1 + C_6^0)(\frac{1}{2})^6 = \frac{15 + 6 + 1}{64} = \frac{22}{64} = 0.34375.$$

4. Olgu urnis 4 kuuli, tagasipanekuga võetakse neist 3. Eeldades, et järjestatud komponentidega elementaarsündmused on võrdtõenäolised, leida järjestamata komponentidega elementaarsündmuste tõenäosused.
   Teame, et kordustega kombinatsioone neljast kolme kaupa on $C_{4+3-1}^{3} = 20$. Samuti teame, et igale kordustega kombinatsioonile, milles korduste arvud on n_1, n_2 ja n_3 vastab $\frac{3!}{n_1!n_2!n_3!}$ järjestatud komponentidega elementaarsündmust. Iga sellise (järjestatud komponentidega) elementaarsündmuse tõenäosus on $\frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$ seega järjestamata komponentidega elementaarsündmuste tõenäosused on

[1, 1, 1]	[1, 1, 2]	[1, 1, 3]	[1, 1, 4]	[1, 2, 2]	[1, 2, 3]	[1, 2, 4]	[1, 3, 3]	[1, 3, 4]	[1, 4, 4]
$\frac{1}{64}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{3}{64}$

[2, 2, 2]	[2, 2, 3]	[2, 2, 4]	[2, 3, 3]	[2, 3, 4]	[2, 4, 4]	[3, 3, 3]	[3, 3, 4]	[3, 4, 4]	[4, 4, 4]
$\frac{1}{64}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{1}{64}$

Loenduv elementaarsündmuste ruum

Olgu Ω loenduv hulk, st $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ ning $p : \Omega \mapsto [0, 1]$ funktsioon, mis rahuldab järgmist tingimust:

$$\sum_{\omega} p(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} p(\omega_i) = 1.$$

Jällegi seab p igale elementaarsündmusele ω_i vastavusse mittenegatiivse arvu $p_i := p(\omega_i)$, nende arvude summa on 1. Tabel on nüüd

ω_1	ω_2	ω_3	$\cdots$
p_1	p_2	p_3	$\cdots$

Funktsiooni p kaudu saab igale Ω alamhulgale $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_k}\}$, kus $k \leq \infty$ vastavusse seada tõenäosuse $\mathbf{P}(A)$ järgmiselt

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega) = \sum_{j=1}^{k} p(\omega_{i_k}) = \sum_{j=1}^{k} p_{i_k}. \tag{1.13}$$

On lihtne näha, et nii defineeritud tõenäosus rahuldab ülaltoodud kolm aksioomi. Esimesed kaks aksioomi on ilmsed. Veendume, et kehtib ka kolmas. Olgu $A_1, A_2, \ldots$ üksteist välistavad sündmused,

$$A_j = \{\omega_{i_{1(j)}}, \ldots, \omega_{i_{k_j(j)}}\}, \quad k_j \leq \infty, \quad j = 1, 2, \ldots.$$

Et sündmused A_j on üksteist välistavad, siis iga elementaarsündmus ω kuulub kõige rohkem ühte sündmusesse A_j. Teisisõnu, indeksite hulgad

$$\{i_{1(1)}, \ldots, i_{k_1(1)}\}, \{i_{1(2)}, \ldots, i_{k_2(2)}\}, \ldots$$

on kõik erinevad. Olgu $\{i_1, i_2 \ldots, i_k\}$ $(k \leq \infty)$ nende hulkade ühendi selline ümberjärjestus, et $i_1 < i_2 < \ldots$. Seega

$$\cup_j A_j = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_k}\}.$$

Vastavalt $\mathbf{P}$ definitsioonile,

$$\mathbf{P}(A_j) = \sum_{l=1}^{k_j} p(\omega_{i_{l(j)}}), \quad \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{k_j} p(\omega_{i_{l(j)}}).$$

Viimane (kahekordne) summa on saadud liidetavate $p(\omega_{i_1}), p(\omega_{i_2}), \ldots$ teatavas järjekorras liitmisel. Analüüsist on teada, et positiivsete liikmetega rea summa ei sõltu liidetavate järjekorrast, seega

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{k_j} p(\omega_{i_{l(j)}}) = \sum_{l=1}^{k} p(\omega_{i_l}) = \mathbf{P}(\cup_j A_j).$$

Kokkuvõtteks: Kui Ω on ülimalt loenduv (st lõplik või loenduv), on iga alamhulk $A \subset \Omega$ sündmus. Sellisel juhul tõenäosus $\mathbf{P}$ esitub alati kujul $\mathbf{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$, kus $p : \Omega \mapsto [0,1]$ on funktsioon, mis rahuldab tingimust $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$. Tõepoolest, ülaltoodust teame, et p defineerib alati (kolme aksioomi rahuldava) tõenäosuse $\mathbf{P}$, teisest küljest aga iga (kolme aksioomi rahuldava) tõenäosuse $\mathbf{P}$ korral saab funktsiooni p defineerida seosega $p(\omega) = \mathbf{P}(\{\omega\})$. Järelikult on iga tõenäosus $\mathbf{P}$ üheselt määratud tema väärtustega elementaarsündmustel (st teades $\mathbf{P}(\{\omega\})$ iga $\omega \in \Omega$ korral, teame ka $\mathbf{P}(A)$ iga $A \subset \Omega$ korral) ning esitatav üheselt tabelina. Sellist tõenäosust $\mathbf{P}$ nimetatakse ka **diskreetseks tõenäosuseks**. Kui Ω on lõplik, leidub selline tõenäosus, et kõik elementaarsündmused on võrdtõenäolised: klassikaline tõenäosus. Kui Ω on loenduv, pole sellist tõenäosust olemas (miks?).

1.3.2 Geomeetriline tõenäosus

Olgu $\Omega \subset \mathbb{R}^k$, $k = 1, 2, 3$ st elementaarsündmuste ruum on 1, 2 või 3-dimensionaalse eukleidilise ruumi alamhulk. Näiteks lõik $[a, b]$, ristkülik $[0,1] \times [0,2]$ või kera raadiusega r. Sellisel juhul on (enamasti) elementaarsündmusi lõpmatu palju ning klassikalist tõenäosust defineerida ei saa. Küll aga saab defineerida tõenäosuse, millel on klassikalise tõenäosusega oluline ühisjoon: sama "suurusega"sündmuste tõenäosus on sama. Tõepoolest, klassikalise tõenäosuse korral on iga sündmuse tõenäosus võrdeline tema elementide arvuga (suurus=võimsus) sõltumata sellest, millised on sinna kuuluvad elementaarsündmused. Kui $\Omega \subset \mathbb{R}^k$, on ka sündmused hulga $\mathbb{R}^k$ alamhulgad ning enamasti on neis lõpmata palju elemente. Seega hulga "suurust"ei saa enam mõõta tema elementide arvuga, küll aga võib seda tihti mõõta pikkuse ($k = 1$), pindala ($k = 2$) või ruumalaga ($k = 3$). Seega, klassikalise tõenäosuse analoog peaks olema tõenäosus, mis rahuldab järgmist tingimust: sündmuse tõenäosus peab (sõltuvalt k väärtusest) olema võrdeline tema pikkuse, pindala või ruumalaga, sõltumata seejuures tema kujust, asukohast vms. Sellist tõenäosust nimetatakse **geomeetriliseks tõenäosuseks**. Tähistame hulga A pikkust, pindala või ruumala $\ell(A)$. Muidugi peab geomeetrilise tõenäosuse korral olema lõpliku pikkuse, pindala või ruumalaga ka hulk Ω (näiteks Ω ei saa olla $\mathbb{R}^k$) ning sündmuse A geomeetriline tõenäosus leitakse siis valemiga

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\ell(A)}{\ell(\Omega)}.$$

Geomeetrilist tõenäosust kasutatakse ülesannetes, mida võib taandada ülesandele punkti juhusliku sattumise kohta ruumi lõplikku piirkonda. Paneme veel tähele: et punkti pikkus, pindala või ruumala on 0, saame, et geomeetrilise tõenäosuse korral on iga elementaarsündmuse tõenäosus 0.

Näited (geomeetriline tõenäosus):

1. Egiptuse liinibuss saabub peatusesse juhuslikult ajavahemikus 8:00 kuni 20.00. Turist hakkab bussi ootama kell 12:00 ning ootab maksimaalselt poolteist tundi. Leida tõenäosus, et ta saab bussi peale.
   Geomeetrilise tõenäosuse korral ei ole oluline see, mis kell turist bussi ootama hakkas vaid see, kaua ta vastu peab. Antud juhul poolteist tundi. Otsitav tõenäosus on siis
   $$\frac{90}{12 \cdot 60} = \frac{1}{8}.$$

2. Kaks isikut leppisid kokku kohtuda teatud kohas ajavahemiku T jooksul. Leida tõenäosus, et kohtumine toimub, kui isikute saabumishetked on sõltumatud ja esimesena saabuja ei oota kauem kui t.
   Tähistame ühe isiku saabumishetke tähega x ja teise saabumishetke tähega y. Elementaarsündmuste ruum on nüüd $\Omega = [0,T] \times [0,T]$. Et kohtumine toimuks, on tarvis, et $|x-y| \leq t$. Seega meid huvitav sündmus on
   $$A = \{(x, y) \in [0,T] \times [0,T] : |x - y| \leq t\}.$$
   Geomeetriline tõenäosus on seega
   $$\mathbf{P}(A) = \frac{\ell(A)}{\ell(\Omega)} = \frac{T^2 - (T-t)^2}{T^2}.$$

3. Ringjoonele visatakse juhuslikult ja teineteist sõltimatult kaks punkti. Leida tõenäosus, et nende vahele tõmmatud kõõl on pikem kui ringjoone sisse joonistatud võrdkülgse kolmnurga külje pikkus.
   Olgu x esimese punkti asukoht. Joonistame ringi võrdkülgse kolmnurga tipuga punktis x. Sündmus toimub, kui teine punkt satub ringjoone sellesse ossa, mis jääb kahe vastastipu vahele. Selle lõigu pikkus on $\frac{1}{3}$ kogu ringjoone pikkusest. Otsitav tõenäosus seega $\frac{1}{3}$.

Nägime, et diskreetse (sh klassikalise) tõenäosuse korral olid kõik Ω alamhulgad sündused. Kas sama kehtib ka geomeetrilise tõenäosuse korral? Teisisõnu, kas igale $\mathbb{R}^k$ alamhulgale saab vastavusse seada pikkuse, pindala või ruumala? Vastamaks sellele küsimusele, peame enesele selgeks tegema, mida me nende mõõtude (pikkuse, pindala, ruumala) all täpselt silmas peame. Vaatleme korraks pikkust ($k = 1$). On selge, et pikkus on alati mittenegatiivne ja lõigu $[a, b]$ pikkus peab olema $b - a$. Seega ühiklõigu $[0, 1]$ pikkus on 1. Samuti on selge, et kahe lõikumatu hulga (näiteks lõigu) ühendi pikkus peab olema pikkuste summa. Siit saame, et lõpliku hulga lõikumatute hulkade ühendi pikkus peab olema ühendisse kuuluvate pikkuste summa. Et geomeetriline tõenäosus rahuldaks tõenäosuse kolmandat aksioomi, peab see tingimus kehtima ka loenduva hulga lõikumatute hulkade korral. Seda omadust nimetatakse *loenduvaks aditiivsuseks.* Samuti on selge, et hulga pikkus ei tohi sõltuda tema asukohast. Näiteks iga x korral on lõgu $[a + x, b + x]$ pikkus $b - a$. Teisisõnu, hulga nihutamine reaalteljel paremale või vasakule ei tohi muuta tema pikkust. Seda omadust nimetatakse *invariantsuseks nihke suhtes.* Võtame nüüd ülalöeldu kokku. Pikkus peab rahuldama järgmisi nõudeid:

1. pikkus on mittenegatiivne;

2. pikkus on loenduvalt aditiivne;

3. ühiklõigu pikkus on 1;

4. pikkus on invariantne nihke suhtes.

Kas sellist pikkust saab defineerida reaaltelje kõikidel alamhulkadel? Selle küsimuse püstitas prantsuse matemaatik H. Lebesgue oma doktoritöös aastal 1902. Vastus on eitav. Selgub, et lõigu $[0,1]$ saab lahutada loenduvaks arvuks lõikumatuteks alamhulkadeks $A_1, A_2, A_3, \ldots$ (st $A_i \cap A_j = \emptyset$, kui $i \neq j$ ja $\cup_i A_i = [0,1]$) nii, et kehtib järgmine omadus. Iga hulka A_i saab nihutada nii, et peale nihutamist on need hulgad ikka lõikumatud, kuid nende ühend on nüüd hoopis hulk $[0,2]$. Teisisõnu, leiduvad hulgad $B_1, B_2, B_3, \ldots$ nii, et B_i on saadud A_i nihutamisel, $B_i \cap B_j = \emptyset$, kui $i \neq j$, kuid $\cup_i B_i = [0,2]$ (vt TNT2, ptk 2.8). Oletame nüüd, et nendel hulkadel A_i defineeritud pikkus $\ell(A_i)$. Siis aga kehtiks

$$1 = \sum_{i=1}^{\infty} \ell(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \ell(B_i) = 2 \quad !?$$

Esimene ja viimane võrdus tulenevad pikkuse loenduvast aditiivsusest, keskmine tuleneb asjaolust, et hulk B_i on saadud hulgast A_i nihutamise läbi, millest $\ell(A_i) = \ell(B_i)$ iga i korral. Väljapääs sellisest paradoksaalsest olukorrast on leppimine tõsiasjaga, et hulkadel A_i (või vähemalt osal neist) pole pikkust.
Pindalalt ja ruumalalt ootame põhimõtteliselt sama, mis pikkuseltki: mittenegatiivsus, loenduv aditiivsus, ühikkuubi mõõt peab olema 1. Lisaks nihkele ootame invariantsust ka pööramiste ja peegeldamiste suhtes. Nimetame teheid, mille suhtes vaadeldav mõõt peab olema invariantne *liigutamisteks*. Kui üks hulk on saadud teise liigutamisel, nimetatakse neid ka *kongruentseteks*. Selgub, et ülalnimetatud paradoks kehtib ka juhul kui $k > 1$.

Teoreem 1.3.1 (Banach, Tarski, 1924) *Olgu A, B kaks suvalist mittetühja sisemusega ruumi $\mathbb{R}^k$ alamhulka ($k = 1, 2, \ldots$). Leidub hulga A loenduv lahutus $A = \cup_i A_i$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i \neq j)$ ja hulga B loenduv lahutus $B = \cup_i B_i$, $B_j \cap B_i = \emptyset$ $(i \neq j)$ nii, et A_i ja B_i on kongruentsed iga i korral.*

Seega pole võimalik defineerida liigutamis-invariantset mõõtu (pindala, ruumala jne) ruumi $\mathbb{R}^k$ kõikide alamhulkade hulgal. Lisame veel, et kui $k > 2$, saab loenduva lahutuse asendada lõplikuga.

Teoreem 1.3.2 (Banach, Tarski, 1924; Banach-Tarski paradoks) *Olgu $k \geq 3$ ja olgu $A, B \subset \mathbb{R}^k$ mittetühja sisemusega tõkestatud hulgad. Siis leidub Hulga A lõplik lahutus $A = A_1 \cup \cdots \cup A_n$ $A_i \cap A_j = \emptyset$ ja hulga B lõplik lahutus $B = B_1 \cup \cdots \cup B_n$, $B_j \cap B_i = \emptyset$ $(i \neq j)$ nii, et A_i ja B_i on kongruentsed iga i korral.*

Banach-Tarski paradoks kehtib juba ruumis $\mathbb{R}^3$. Seega on võimalik lahutada kera raadiusega 1 (hernes) lõplikuks arvuks tükkideks nii, et neist saab kokku kera raadiusega 10^{8000} (maakera).

Nägime, et mitte kõikidel ruumi $\mathbb{R}^k$ alamhulkadel pole pikkust, pindala või ruumala. Selgub aga, et on lai klass hulga $\mathbb{R}^k$ alamhulki, nn *Boreli hulgad*, millistel on pikkus, pindala või ruumala olemas. Järelikult geomeetrilise tõenäosuse korral saame tõenäosust arvutada vaid Boreli hulkadel ehk geomeetrilise tõenäosuse korral ainult Boreli hulgad on sündmused. Õnneks on Boreli hulkade klass nii suur, et sinna kuuluvad kõik "igapäevases elus"ette tulevad hulgad.

1.3.3 σ-algebra

Teame, et iga sündmus on Ω alamhulk. Geomeetrilise tõenäosuse juures nägime aga, et mitte alati ei ole kõik Ω alamhulgad sündmused. Küll aga peaks sündmuste ülimalt loenduv ühend olema sündmus, sündmuste ülimalt loenduv ühisosa olema sündmus ning iga sündmuse täiend peaks olema sündmus. Nimetatud tingimusi rahuldavat Ω alamhulkade klassi nimetatakse *σ-algebraks.*

Definitsioon 1.3.3 *Elementaarsündmuste ruumi Ω alamhulkade süsteemi $\mathcal{F}$ nimetatakse* **σ-algebraks** *hulgal Ω (loe: sigma-algebra), kui ta rahuldab järgmisi nõudeid:*

1) $\mathcal{F}$ sisaldab tühihulka ja koguhulka, st $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$;

2) kui $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2, \ldots$, siis ka $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ (süsteem $\mathcal{F}$ on kinnine loenduva ühendi võtmise suhtes);

3) kui $A \in \mathcal{F}$, siis $\bar{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$ (süsteem $\mathcal{F}$ on kinnine täiendi võtmise suhtes).

Märkused:

- σ-algebra on kinnine lõplike ühendite suhtes: kui $A, B \in \mathcal{F}$, siis
$$A \cup B = A \cup B \cup \emptyset \cup \emptyset \cdots \in \mathcal{F};$$
- σ-algebra kinnine ka lõplike ühisosade suhtes: kui $A, B \in \mathcal{F}$, siis
$$A \cap B = \overline{(\bar{A} \cup \bar{B})} \in \mathcal{F};$$
- σ-algebra kinnine ka loenduvate ühisosade suhtes: kui $A_i \in \mathcal{F}$, siis
$$\cap_i A_i = \overline{\cup_i (\bar{A}_i)} \in \mathcal{F};$$
- σ-algebra on kinnine vahe ja sümmeetrilise vahe võtmise suhtes: kui $A, B \in \mathcal{F}$, siis
$$A \backslash B \in \mathcal{F} \quad \text{ja} \quad A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \in \mathcal{F}.$$

Näited (σ-algebrad):

1. Kõige väiksem ja kõige suurem σ-algebra on vastavalt $\{\Omega, \emptyset\}$ ning 2^{Ω}.
2. Suvalise hulga $A \subset \Omega$ korral on $\{\Omega, \emptyset, A, \bar{A}\}$ väikseim σ-algebra, mis sisaldab hulka A. Samuti on see väikseim σ-algebra, mis sisaldab hulka $\bar{A}$ ning väikseim σ-algebra, mis sisaldab nii hulka A kui $\bar{A}$.
3. Mittelõikuvate hulkade $A, B \subset \Omega$ (st $A \cap B = \emptyset$) korral on
$$\{\Omega, \emptyset, A, B, \overline{A \cup B}, \bar{A}, \bar{B}, A \cup B, \}$$
väikseim σ-algebra, mis sisaldab nii hulki A ja B. Samuti on ta väikseim σ-algebra, mis sisaldab hulki B ja $\overline{A \cup B}$ ning väikseim σ-algebra, mis sisaldab hulki A ja $\overline{A \cup B}$. Samuti on ta väikseim σ-algebra, mis sisaldab hulki $A, B, \overline{A \cup B}$, kuid mitte väikseim σ-algebra, mis sisaldab hulka A.

4. Olgu $\Omega = [0, 1]$. Siis
$$\Big\{\emptyset, [0, \frac{1}{2}), [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}), [\frac{3}{4}, 1], [0, \frac{3}{4}), [\frac{1}{2}, 1], [0, \frac{1}{2}) \cup [\frac{3}{4}, 1], \Omega\Big\} \tag{1.14}$$
   - on väikseim σ-algebra, mis sisaldab hulki $[0, \frac{1}{2}), [\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$;
   - on väikseim σ-algebra, mis sisaldab hulki $[0, \frac{1}{2}), [\frac{3}{4}, 1]$;
   - on väikseim σ-algebra, mis sisaldab hulki $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}), [\frac{3}{4}, 1]$;
   - on väikseim σ-algebra, mis sisaldab hulki $[0, \frac{1}{2}), [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}), [\frac{3}{4}, 1]$;
   - on väikseim σ-algebra, mis sisaldab hulki $[0, \frac{3}{4}), [\frac{1}{2}, 1]$;
   - on väikseim σ-algebra, mis sisaldab hulki $[0, \frac{1}{2}) \cup [\frac{3}{4}, 1], [\frac{3}{4}, 1]$;
   - on väikseim σ-algebra, mis sisaldab hulki $[0, \frac{1}{2}) \cup [\frac{3}{4}, 1], [0, \frac{1}{2})$;
   - ei ole väikseim σ-algebra, mis sisaldab hulki $[0, \frac{1}{2}) \cup [\frac{3}{4}, 1], [\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$.
5. Moodustagu hulgad $A_1, \ldots, A_n$ Ω tükelduse, st $A_i \cap A_j = \emptyset$, kui $i \neq j$ ja $\cup_j A_j = \Omega$. Väikseim σ-algebra, mis sisaldab kõiki neid tükke, koosneb nende kõivõimalikest ühenditest, kokku 2^n elementi. Näites 2 moodustavad tükelduse hulgad A ja $\bar{A}$ (σ-algebras $2^2 = 4$ elementi); näites 3 moodustvad hulgad A, B ja $\overline{A \cup B}$ (σ-algebras $2^3 = 8$ elementi); näites 4 moodustavad tükelduse hulgad $[0, \frac{1}{2}), [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}), [\frac{3}{4}, 1]$ (σ-algebras on $2^3 = 8$ elementi).
6. Hulga Ω ülimalt loenduvad hulgad ja nende täiendid moodustavad σ-algebra.

Tihti pakub huvi väikseim σ-algebra, mis sisaldab mingeid kindlaid hulki. Sel juhul öeldakse, et antud hulgad *tekitavad* σ-algebra. Ülaltoodud näitest teame, et σ-algebra $\{\Omega, \emptyset, A, \bar{A}\}$ tekitab hulk A, samuti hulk $\bar{A}$ ning hulgad A ja $\bar{A}$; σ-algebra $\{\Omega, \emptyset, A, B, \overline{A \cup B}, \bar{A}, \bar{B}, A \cup B\}$ tekitavad hulgad A ja B; σ-algebra (1.14) tekitavad nii hulgad $[0, \frac{1}{2}), [\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ kui ka hulgad $[0, \frac{1}{2}), [\frac{3}{4}, 1]$, samuti hulgad $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}), [\frac{3}{4}, 1]$ jne.

1.3.4 Boreli σ-algebra ja Lebesgue'i mõõt

Teame, et leidub ruumi $\mathbb{R}^k$ alamhulki, millel pole pikkust, pindala või ruumala. Samas on piisavalt palju hulki, millistel see mõõt – tähistame seda ℓ ja nimetagem seda lihtsuse mõttes ruumalaks – on olemas. Sellised hulgad on näiteks *ristkülikud*:
$$[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_k, b_k], \quad a_i \geq b_i, \quad i = 1, \ldots, k).$$
Tõepoolest, ristküliku ruumala on
$$\ell\big([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_k, b_k]\big) = \prod_{i=1}^{k} (b_i - a_i). \tag{1.15}$$
Siin k võib olla suvaline täisarv, mitte ilmtingimata $1, 2, 3$. Hulgad, millistel on defineeritud ruumala peaksid aga moodustama σ-algebra (kinnisus loenduvate ühendite ja ühisosade suhtes) ja, nagu nägime, seejuures sisaldama ka kõiki ristkülikuid. Siit definitsioon.

Definitsioon 1.3.4 *Ruumi $\mathbb{R}^k$ kõikide ristkülikute tekitatud σ-algebrat nimetatakse* **Boreli σ-algebraks (ruumil $\mathbb{R}^k$)** *ja tähistatakse $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ ($k = 1, 2, \ldots$). Boreli σ-algebra elemente nimetatakse* **Boreli hulkadeks**.

Seega Boreli σ-algebra on väikseim σ-algebra, mis sisaldab kõik ristkülikud, st kõik hulgad kujul $[a_1, b_1]\times\cdots\times[a_k, b_k]$ ($a_i \geq b_i$, $i = 1, \ldots, k$). Kuigi kõikidest ristkülikuid sisaldavatest σ-algebratest on ta väikseim, on Boreli σ-algebra nii suur, et sisaldab ka:

- kõiki lahtisi hulki (näiteks lahtised kerad, lahtised ristkülikud jne);
- kõiki kinniseid hulki (järeldub eelmisest);
- kõiki ühepunktilisi hulki (järeldub eelmisest);
- kõiki ülimalt loenduvaid hulki (järeldub eelmisest).

Boreli kulkade klassi (Boreli σ-algebra) on väga rikkalik. Võib öelda, et kõik hulgad, mis tudeng oskab ette kujutada, on Boreli hulgad. Samas Boreli σ-algebra on kontiimumi võimsusega. Et aga $\mathbb{R}^k$ alamhulkade hulk on suurema võimsusega, siis leidub väga-väga palju hulki, mis pole Boreli hulgad.

Kõik ristkülikud on Boreli hulgad. Igal ristkülikul on seose (1.15) kaudu antud ruumala ℓ. Saab näidata, et kujutist ℓ saab laiendada ristkülikutelt kõikidele Boreli hulkadele nii, et säiliks loenduv aditiivsus. Teisisõnu, leidub kujutis mis igale Boreli hulgale $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ seab vastavusse mittenegatiivse arvu $\ell(B)$ nii, et järgmised nõuded on rahuldatud:

1. $\ell(B) \geq 0$ (mittenegetiivsus);
2. iga ristküliku $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_k, b_k]$ korral
$$\ell\big([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_k, b_k]\big) = \prod_{i=1}^{k}(b_i - a_i);$$
3. ℓ on loenduvalt aditiivne: kui $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ ja $B_i \cap B_j = \emptyset$, kui $i \neq j$, siis
$$\ell\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \ell(B_i).$$

Tingimusest 2 järeldub, et saadud ℓ normeerib ühikkuubi. Samuti saab näidata, et ℓ on invariantne liigutamiste suhtes ja ühene. Arvu $\ell(B)$ nimetatakse hulga B **Lebesgue'i mõõduks**. Juhul, kui $k = 1$, on Lebesgue'i mõõt pikkus; kui $k = 2$, on Lebesgue'i mõõt pindala, kui $k \geq 3$ nimetame seda ruumalaks.

Olgu nüüd $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$. On lihtne näha, et hulkade klass
$$\mathcal{B}(A) := \{A \cap B : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)\}$$
on σ-algebra (veendu selles!) ning $\mathcal{B}(A) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ (miks?). Seega, $\mathcal{B}(A)$ elemendid on kõik need Boreli hulgad, mis on ka A alamhulgad. Seetõttu nimatatakse seda σ-algebrat $\mathcal{B}(A)$ **Boreli σ-algebraks hulgal** A. Näiteks $\mathcal{B}([0, 1]) =: \mathcal{B}[0, 1]$ on Boreli σ-algebra lõigul $[0, 1]$. Sinna kuuluvad muuhulgas kõik ülimalt loenduvad hulgad lõigul $[0, 1]$, kõik kinnised, lahtised ja poollahtised lõigud $[a, b]$, (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$ ($a \leq b$ ja $a, b \in [0, 1]$) ja palju-palju muud. Et iga $\mathcal{B}(A)$ element on

ka $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ element, on kõikidel $\mathcal{B}(A)$ elementidel defineeritud Lebesgue'i mõõt (pikkus, pindala, ruumala).

Kokkuvõtteks: Boreli σ-algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ on ristkülikute tekitatud σ-algebra hulgal $\mathbb{R}^k$. Kõik "praktikas"ettetulevad hulgad on $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ elemendid ehk Boreli hulgad. Igal Boreli hulgal on defineeritud Lebesgue'i mõõt ℓ ehk ruumala ($k \geq 3$) pindala ($k = 2$) või pikkus ($k = 1$). Seejuures on iga ristküliku Lebesgue'i mõõt on antud seosega (1.15) ning samuti kehtib kõik muu, mis me ruumalalt ootame: mittenegatiivsus, loenduv aditiivsus ja liigutamis-invariansus (kongruentsete hulkade ruumalad on võrdsed).

1.3.5 Tõenäosus

Aastal 1933 võttis vene matemaatik Andrei Kolmogorov 300 aastat kestnud tõenäosusteooria arengud kokku järmise aksiomaatilise definitsiooniga.

Definitsioon 1.3.5 *Olgu Ω elementaarsündmuste ruum ning $\mathcal{F}$ σ-algebra (hulgal Ω).* **Tõenäosuseks** *ehk* **tõenäosusmõõduks** *nimetatakse funktsiooni $\mathbf{P}$, mis igale $\mathcal{F}$ elemendile $A \in \mathcal{F}$ seab vastavusse arvu $\mathbf{P}(A)$ nii, et on rahuldatud järgmised nõuded:*

P1. $\mathbf{P}(A) \geq 0 \ \forall A \in \mathcal{F}$ *(mittenegatiivsus);*

P2. $\mathbf{P}(\Omega) = 1$ *(normeeritus);*

P3. kui $A_i \in \mathcal{F}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ ja $A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j$, siis

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i)$$

(loenduv additiivsus).

Mõnevõrra kompaktsem versioon ülaltoodud definitsioonist oleks selline: kujutis $\mathbf{P} : \mathcal{F} \mapsto [0, 1]$ on tõenäosusmõõt, kui ta on loenduvalt aditiivne ja $\mathbf{P}(\Omega) = 1$.

Definitsioon 1.3.6 *Kolmikut $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ nimetatakse* **tõenäosusruumiks** *(probability space), σ-algebra $\mathcal{F}$ elemente nimetatakse* **sündmusteks** *(events).*

Seega on meil juhus formaliseeritud kolme atribuudiga: elementaarsündmuste ruum Ω, sündmuste hulk $\mathcal{F}$ ja tõenäosusmõõt $\mathbf{P}$. Tõenäosus $\mathbf{P}$ rahuldab aksioome P1, P2 ja P3, mis on meile juba tuttavad. Pane tähele: sündmused on ainult $\mathcal{F}$ elemendid, st mitte kõik alamhulgad ei pruugi olla sündmused ning tõenäosus(mõõt) on defineeritud ainult sündmustel. Kas hulk A on sündmus või mitte, sõltub ainult tõenäosusruumist: võib juhtuda, et mingi tõenäosusruumi $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ korral A pole sündmus, st $A \notin \mathcal{F}$, kuid mõne teise tõenäosusruumi $(\Omega, \mathcal{F}', \mathbf{P}')$ korral A on sündmus, st $A \in \mathcal{F}'$. Aga selle, milline $\mathcal{F}$ kuulub tõenäosusruumi määravad Ω ja eelkõiga $\mathbf{P}$. Näiteks diskreetse tõenäosuse korral (Ω ülimalt loenduv) on $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$; geomeetrilise tõenäosuse korral aga 2^{Ω} on liiga suur hulk ja sündmusteks tuleb valida Boreli hulgad, st $\mathcal{F}$ on Boreli σ-algebra. Samas ka mitteloenduva Ω korral leidub tõenäosusmõõte, mille argumentideks võib võtta kõik Ω alamhulgad ja siis $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ (vt näide 3).

Näited (tõenäosusruum):

1. Diskreetne tõenäosus. Olgu Ω ülimalt loenduv. Antud funktsiooni

$$p : \Omega \mapsto [0,1], \quad \sum_{\omega} p(\omega) = 1$$

korral defineerime diskreetse tõenäosuse $\mathbf{P}$ järgmiselt

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega), \quad A \subset \Omega.$$

Teame, et selline $\mathbf{P}$ rahuldab tingimusi P1, P2 ja P3 ning on seega tõenäosusmõõt. Vastav tõenäosusruum on $(\Omega, 2^{\Omega}, \mathbf{P})$.

2. Geomeetriline tõenäosus. Olgu $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ selline Boreli hulk, millel on lõplik ruumala, st $\ell(\Omega) < \infty$. Defineerime iga $A \in \mathcal{B}(\Omega)$ korral geomeetrilise tõenäosuse

$$\mathbf{P}(A) := \frac{\ell(A)}{\ell(\Omega)}.$$

Veendume, et $\mathbf{P}$ on tõenäosusmõõt. Kõigepealt paneme tähele, et σ-algebra $\mathcal{B}(\Omega)$ moodustavad Boreli hulgad (need $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ elemendid, mis sisalduvad hulgas Ω), mistõttu neil kõigil on defineeritud Lebesgue'i mõõt ℓ ning seega ka tõenäosus. Mittenegatiivsus (aksioom P1) tuleneb ℓ mittenegatiivsusest. Normeeritus (aksioom P2) tuleneb $\mathbf{P}$ definitsioonist: $\mathbf{P}(\Omega) = \frac{\ell(\Omega)}{\ell(\Omega)} = 1$. Loenduv aditiivsus (aksioom P3) tuleneb Lebesgue'i mõõdu ℓ loenduvast aditiivsusest: kui $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{B}(\Omega)$ ja $A_i \cap A_j = \emptyset$, kui $i \neq j$, siis

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \frac{\ell\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)}{\ell(\Omega)} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \ell(A_i)}{\ell(\Omega)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\ell(A_i)}{\ell(\Omega)} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i).$$

Tõenäosusruum seega $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mathbf{P})$. Erijuhul, kui $\ell(\Omega) = 1$, võime kirjutada ka $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \ell)$.

3. Aatom. Olgu Ω suvaline hulk, $x \in \Omega$. Defineerime iga $A \subset \Omega$ korral $\delta_x(A)$ järgmiselt

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1, & \text{kui } x \in A; \\ 0, & \text{kui } x \notin A. \end{cases}$$

Veendu, et δ_x on tõenäosusmõõt. Seega $(\Omega, 2^{\Omega}, \delta_x)$ on tõenäosusruum.

<u>Kokkuvõtteks:</u> Tõenäosusruum on kolmik: elementaarsündmuste ruum Ω, sündmuste hulk $\mathcal{F}$ ja tõenäosusmõõt $\mathbf{P}$. Sündmused on Ω alamhulgad ja rahuldavad järgmisi tingimusi: tühihulk on sündmus, iga sündmuse täiend on sündmus, ülimalt loenduvate sündmuste ühisosa ja ühend on ka sündmus. Sellist hulkade klassi nimetatakse σ-algebraks. Pane tähele, et sündmuste mitteloenduv ühend ja ühusosa ei pruugi sündmus olla. Tõenäosusmõõt seab igale sündmusele $A \in \mathcal{F}$ vastavusse arvu $\mathbf{P}(A)$ – sündmuse A tõenäosuse – nii, et on rahuldatud tingimused P1, P2 ja P3.

Tõenäosuse omadused

Järgnevas tõestame olulised tõenäosuse omadused.

Lemma 1.3.1 *Olgu* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *mingi tõenäosusruum. Siis kehtivad järgnevad omadused:*

1. $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$;

2. *kui* $A_i \in \mathcal{F},\ i = 1, 2, \ldots, n$ *on üksteist välistavad, st* $A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j$, *siis kehtib võrdus*
$$\mathbf{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i);$$

3. $\mathbf{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$;

4. *kui* $A, B \in \mathcal{F},\ A \subset B$, *siis* $\mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B)$ *(monotoonsus);*

5. $\mathbf{P}(A) \leq 1, \quad \forall A \in \mathcal{F}$;

6. $\mathbf{P}(A \setminus B) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A \cap B), \quad \forall A, B \in \mathcal{F}$;

7. $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B), \quad \forall A, B \in \mathcal{F}$;
$$\mathbf{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbf{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \mathbf{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots$$
$$\cdots + (-1)^{n-1} \mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n), \qquad A_i \in \mathcal{F},\ i = 1, 2, \ldots, n;$$

8. $\mathbf{P}(A \cup B) \leq \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B), \quad \forall A, B \in \mathcal{F}$;
$\mathbf{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i), \quad A_i \in \mathcal{F},\ i \in \mathbb{N}$ *(subaditiivsus);*

9. *kui* $\mathbf{P}(A_i) = 1$ *iga* $i = 1, 2, \ldots$ *korral, siis* $\mathbf{P}(\cap_{i=1}^{\infty} A_i) = 1$;

10. *Tõenäosuse pidevus:*

   a) $A_i \in \mathcal{F},\ i \in \mathbb{N},\ A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_i) = \mathbf{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$;
   b) $A_i \in \mathcal{F},\ i \in \mathbb{N},\ A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_i) = \mathbf{P}(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i)$;

Tõestus. Omadused 1, 2 on meil juba tõestatud (kus?).
Omadused 3 ja 4 järelduvad omadusest 2 (kuidas?).
Omadus 5 järeldub omadusest 4 (kuidas?).
Omadus 6 järeldub samuti omadusest 2, sest $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$ ning $(A \setminus B)$ ja $(A \cap B)$ on teineteist välistavad.
Omaduse 7 tõestus on induktsiooniga n järgi:
$n = 2$: Tõestame
$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B).$$

Selleks paneme tähele: $(A\backslash B)\cup(A\cap B)\cup(B\setminus A)=A\cup B$ ja hulgad $A\backslash B, A\cap B, B\setminus A$ on üksteist välistavad. Seega omadus 2: $\mathbf{P}(A\cup B)=\mathbf{P}(A\backslash B)+\mathbf{P}(A\cap B)+\mathbf{P}(B\setminus A)$ ning 6:

$$\mathbf{P}(A\cup B)=\mathbf{P}(A)-\mathbf{P}(A\cap B)+\mathbf{P}(A\cap B)+\mathbf{P}(B)-\mathbf{P}(B\cap A)=\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)-\mathbf{P}(B\cap A).$$

$n>2:$

$$\mathbf{P}(\cup_{i=1}^n A_i)=\mathbf{P}(\cup_{i=1}^{n-1}A_i)+\mathbf{P}(A_n)-\mathbf{P}((\cup_{i=1}^{n-1}A_i)\cap A_n))=\mathbf{P}(\cup_{i=1}^{n-1}A_i)+\mathbf{P}(A_n)-\mathbf{P}(\cup_{i=1}^{n-1}(A_i\cap A_n)).$$

Nüüd (induksiooni eeldus):

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\cup_{i=1}^{n-1}A_i)&=\sum_{i=1}^{n-1}\mathbf{P}(A_i)-\sum_{i<j\le n-1}\mathbf{P}(A_i\cap A_j)+\sum_{i<j<k\le n-1}\mathbf{P}(A_i\cap A_j\cap A_k)+\cdots\\
&\cdots+(-1)^{n-2}\mathbf{P}(A_1\cap\cdots\cap A_{n-1})\\
-\mathbf{P}(\cup_{i=1}^{n-1}(A_i\cap A_n))&=-\sum_{i=1}^{n-1}\mathbf{P}(A_i\cap A_n)+\sum_{i<j\le n-1}\mathbf{P}\big((A_i\cap A_n)\cap(A_j\cap A_n)\big)+\cdots\\
&\cdots+(-1)^{n-1}\mathbf{P}\big((A_1\cap A_n)\cap\cdots\cap(A_{n-1}\cap A_n)\big)\\
&=-\sum_{i=1}^{n-1}\mathbf{P}(A_i\cap A_n)+\sum_{i<j\le n-1}\mathbf{P}(A_i\cap A_j\cap A_n)+\cdots+(-1)^{n-1}\mathbf{P}(A_1\cap\cdots\cap A_n).
\end{aligned}$$

Liites kokku kõik üksikud (ära unusta $\mathbf{P}(A_n)$), paarid, kolmikud jne, saamegi nõutud summa.
Omadus 8. Seos $\mathbf{P}(A\cup B)\le\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)$ järeldub sellest, et $\mathbf{P}(A\cup B)=\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)-\mathbf{P}(A\cap B)$ ja $\mathbf{P}(A\cap B)\ge 0$. Üldiselt aga defineerime hulgad

$$B_1:=A_1,\quad B_2=A_2\backslash A_1,\quad B_3:=A_3\backslash(A_1\cup A_2),\ldots.$$

Hulgad $B_1,B_2,\ldots$ on lõikumatud, $\cup_n B_n=\cup_n A_n$ (miks?) ja $B_i\subset A_i$ iga i korral. Seega loenduv aditiivsus ja monotoonsus:

$$\mathbf{P}(\cup_{i=1}^\infty A_i)=\mathbf{P}(\cup_{i=1}^\infty B_i)=\sum_{i=1}^\infty\mathbf{P}(B_i)\le\sum_{i=1}^\infty\mathbf{P}(A_i).$$

Omadus 9 järeldub eelmisest (kuidas?)
Omadus 10 a). Olgu $A_1\subset A_2\subset\cdots, A=\cup_{i=1}^\infty A_i$. Defineeri hulgad

$$B_1:=A_1,\ B_2:=A_2\setminus A_1,\ B_3:=A_3\setminus A_2,\ldots B_i=A_i\setminus A_{i-1}\ldots.$$

Et $\cup_i B_i=\cup_i A_i$ ja sündmused B_i on üksteist välistavad, siis

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\cup_{i=1}^\infty A_i)=\mathbf{P}(\cup_{i=1}^\infty B_i)&=\sum_{i=1}^\infty\mathbf{P}(B_i)=\mathbf{P}(A_1)+\sum_{i=2}^\infty\mathbf{P}(A_i\setminus A_{i-1})=\mathbf{P}(A_1)+\lim_n\sum_{i=2}^n\mathbf{P}(A_i\setminus A_{i-1})\\
&=\mathbf{P}(A_1)+\lim_n\sum_{i=2}^n\big(\mathbf{P}(A_i)-\mathbf{P}(A_{i-1})\big)=\lim_n\mathbf{P}(A_n).
\end{aligned}$$

Omaduse 10 b) tõestamiseks kasuta DeMorgani valemeid ja omadust 10 a). ■

Näited (tõenäosuse omadused):

1. Täringut visatakse neli korda. Leida tõenäosus, et vähemalt üks kord tuleb 6.
   Tõenäosus, et i-ndal viskel tuleb 6 on $\frac{1}{6}$. Tõenäosus, et i-ndal ja j-ndal viskel tuleb 6 on $\frac{1\cdot1\cdot6\cdot6}{6^4} = \frac{1}{36}$. Tõenäosus, et i-ndal ja j-ndal ja k-ndal viskel tuleb 6 on $\frac{1\cdot1\cdot1\cdot6}{6^4} = \frac{1}{216}$. Tõenäosus, et igal viskel tuleb 6 on $\frac{1}{6^4} = \frac{1}{1296}$. Olgu A_i tõenäosus, et i-ndal viskel tuleb 6. Otsitav tõenäosus on

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\cup_{i=1}^4 A_i) &= \sum_{i=1}^4 \mathbf{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathbf{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} \mathbf{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \\ &= \frac{4}{6} - 6\frac{1}{36} + 4\frac{1}{6\cdot 36} - \frac{1}{1296} = \frac{1}{2} + \frac{18-1}{1296} \approx 0.513.\end{aligned}$$

2. Täringut visatakse 6 korda. Leida tõenäosus, et kuue viske jooksul vähemalt üks kord tulevad nii 1, 2, kui ka 3.
   Olgu A_i sündmus, et kordagi ei tule i, $i = 1, 2, 3$. Meid huvitav sündmus on $\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}$. Leiame $\mathbf{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$. Selleks paneme tähele, et

$$\mathbf{P}(A_i) = \Big(\frac{5}{6}\Big)^6, \quad \mathbf{P}(A_i \cap A_j) = \Big(\frac{4}{6}\Big)^6, \quad \mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \Big(\frac{3}{6}\Big)^6.$$

   Seega

$$\mathbf{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 3\big(\frac{5}{6}\big)^6 - 3\big(\frac{4}{6}\big)^6 + \Big(\frac{3}{6}\Big)^6 \approx 1,0047 - 0.26 + 0.0156 \approx 0.76$$

   ja otsitav tõenäosus on ligikaudu $1 - 0.76 = 0.24$.

3. N inimest viskavad urni ühe kuuli. Pärast kuulid segatakse ning igaüks võtab välja ühe. Leida tõenäosus, et:

   - ükski neist ei saa oma vana kuuli tagasi;
   - täpselt k inimest saavad oma vana kuuli tagasi.

   Olgu A_i sündmus, et i-s inimene saab oma kuuli tagasi, $i = 1, \dots, N$. Fikseerime sündmuste alamhulga $A_{i_1}, \dots, A_{i_n}$ ja leiame tõenäosuse $\mathbf{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n})$. See on tõenäosus, et $i_1, i_2, \dots, i_n$ inimene saavad oma kuulid tagasi. Siin elementaarsündmused on kuulide võtmise järjekord, neid on $N!$ tükki. Kui i_1 saab oma kuuli, on temal võimalusi 1. Seega sündmusesse $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n}$ kuulub $(N-n)!$ elementaarsündmust, millest $\mathbf{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n}) = \frac{(N-n)!}{N!}$. Tõenäosus, et vähemalt üks inimene saab oma kuuli tagasi on

$$\mathbf{P}(\cup_{i=1}^N A_i) = \sum_{i=1}^N \mathbf{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathbf{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} \mathbf{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) + \dots + (-1)^{N-1}\mathbf{P}(A_1 \cap \dots \cap A_N).$$

   Summas

$$\sum_{i_1<i_2<\dots<i_n} \mathbf{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n})$$

on C_N^n liidetavat, seega

$$\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_n} \mathbf{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_n}) = \frac{N!}{n!(N-n)!} \frac{(N-n)!}{N!} = \frac{1}{n!}.$$

Nüüd

$$\mathbf{P}(\cup_{i=1}^{N} A_i) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \cdots + (-1)^{N-1}\frac{1}{N!}. \tag{1.16}$$

Seega tõenäosus, et ükski neist inimestest ei saa oma kuuli tagasi:

$$1 - \big(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \cdots + (-1)^{N-1}\frac{1}{N!}\big) = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \cdots + (-1)^{N}\frac{1}{N!}$$

Analüüsist on teada, et $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$, millest $e^{-1} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$. Seega suure N korral otsitav tõenäosus on ligikaudu $e^{-1} \approx 0.36788$.
Teine küsitav tõenäosus on

$$\frac{1}{k!}\big(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^{N-k}}{(N-k)!}\big),$$

selle leidmine on ülesanne.

4. Leiame tõenäosuse, et kahe hästi segatud kaardipaki kaartide laotamisel lauale üksteise alla satub vähemalt üks kaart kohakuti. See on sisuliselt eelmine ülesanne, sest arutleda võib järgmiselt: 52 alumist kaarti on kui 52 inimest ja ülemised kaardid vastavad kuulid. Seega $N = 52$ ning otsitav tõenäosus on (valem (1.16)) $\sum_{k=1}^{52} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \approx 0.632$.

1.4 Tinglikud tõenäosused

1.4.1 Tinglik tõenäosus ja korrutamislause

Vaatleme järgmist ülesannet. Peres on 2 last. On teada, et neist üks on poiss. Kui suur on tõenäosus, et ka teine laps on poiss? Elementaarsündmusi on 4: $(p,p),(p,t),(t,p),(t,t)$ (siin t on "tüdruk"ja p on "poiss", paaris esimene täht vastab vanemale, teine nooremale lapsele). Eeldame, et kõik elementaarsündmused (paarid) on võrdtõenäolised. Sündmusele { ka teine laps on poiss } vastab üks elementaarsündmus (p,p); teadmine, et üks laps on poiss välistab elementaarsündmuse (t,t). Järgijäänud elementaarsündmused $(p,p),(p,t),(t,p)$ on ikka võrdtõenäolised, iga paari tõenäosus on nüüd $\frac{1}{3}$. Meid huvitav sündmus koosneb vaid ühest elementaarsündmusest, otsitav tõenäosus on seega $\frac{1}{3}$.

Definitsioon 1.4.1 *Olgu antud sündmus B, mille tõenäosus ei ole null ($\mathbf{P}(B) > 0$). Sündmuse A* **tinglikuks tõenäosuseks tingimusel, et** *B* **on toimunud**, *nimetatakse suhet $\frac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}(B)}$ ning seda tähistatakse kujul $\mathbf{P}(A|B)$.*

Ülaltoodud näites $B =$ { vähemalt üks kahest lapsest on poiss } nind $A =$ { mõlemad lapsed on poisid }. Selge, et $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{4}$, kuid ülaltpoodud näites oli meil lisainformatsioon: teadsime, et sündmus B on toimunud ning meid huvitab hoopis tinglik tõenäosus $\mathbf{P}(A|B)$. Antud juhul teadmine, et B on toimunud suurendab A tõenäosust (see pole alati nii!) ning $\mathbf{P}(A|B) = \frac{1}{3}$.

Osutub, et kui me igale sündmusele A seame vastavusse tema tingliku tõenäosuse $\mathbf{P}(A|B)$, siis me saame uue tõenäosusmõõdu.

Lemma 1.4.1 *Olgu* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *mingi tõenäosusruum ning* $B \in \mathcal{F}$ *selline, et* $\mathbf{P}(B) > 0$. *Defineerime kujutuse* $\mathbf{Q} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ *valemiga*

$$\mathbf{Q}(A) = \mathbf{P}(A|B) \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

Siis $\mathbf{Q}$ *on tõenäosusmõõt ning* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{Q})$ *on tõenäosusruum.*

Tõestus. Veendu, et $\mathbf{Q}$ rahuldab aksioome P1, P2, P3. ■

Seega $\mathbf{Q}$ on tõenäosusmõõt ning tal on seetõttu kõik tõenäosuse omadused. Näiteks

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3|B) =& \mathbf{P}(A_1|B) + \mathbf{P}(A_2|B) + \mathbf{P}(A_3|B) \\ &- \mathbf{P}(A_1 \cap A_2|B) - \mathbf{P}(A_2 \cap A_3|B) - \mathbf{P}(A_1 \cap A_3|B) \\ &+ \mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3|B).\end{aligned}$$

Näited (tinglik tõenäosus):

1. Täringut visatakse 2 korda, neist esimese viske tulemus on 3. Leida tõenäosus, et kahe viske summa on suurem kui 6.
   Siin $\Omega = \{(i,j), \quad i,j = 1,\dots,6\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$ ning $\mathbf{P}(\omega) = \frac{1}{36}$ iga $\omega \in \Omega$ korral. Olgu $A = \{(i,j) \in \Omega : i + j > 6\}$ ja $B = \{(i,j) \in \Omega : i = 3\}$. Meid huvitav tõenäosus on

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\mathbf{P}\big(\{(3,j) \in \Omega : 3 + j > 6\}\big)}{\mathbf{P}\big(\{(3,j) \in \Omega\}\big)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

2. Peres on kaks last, neist vanem on poiss. Leida tõenäosus, et teine laps on ka poiss.
   Siin $\Omega = \{(p,p),(p,t),(t,p),(t,t)\}$, $\mathbf{P}(\omega) = \frac{1}{4}$ iga $\omega \in \Omega$ korral; $A = \{(p,p)\}$ ning $B = \{(p,p),(p,t)\}$. Otsitav tõenäosus seega

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\mathbf{P}\{(p,p)\}}{\mathbf{P}\{(p,p),(p,t)\}} = \frac{1}{2}.$$

3. Urnis on 6 musta, 4 valget ja 10 punast kuuli, sealt võetakse juhuslikult üks kuul. Leida tõenäosus, et see on valge, kui on teada, et see kuul pole punane.
   Siin $A = \{$ võetud kuul on valge $\}$ ja $B = \{$ võetud kuul pole punane $\}$. Seega $A \subset B$, millest $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)$ ehk

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{4}{10}.$$

4. Putuka eluiga jälgiti ühe ajaühiku jooksul. Tõenäosus, et putukas sureb ajaintervallis $[0,\alpha]$, kus $\alpha \in (0,1]$, on $\frac{\alpha}{2}$. Leida tõenäosus, et elab:

   (a) kauem kui ajaühik;

   (b) kauem kui ajaühik, kui on teada, et ajahetkel α ta on veel elus.

   Olgu $A_\alpha = \{$ putukas elab kauem kui $\alpha\}$. Lahend: (a) $\mathbf{P}(A_1) = 0.5$; (b)

$$\mathbf{P}(A_1|A_\alpha) = \frac{\mathbf{P}(A_1 \cap A_\alpha)}{\mathbf{P}(A_\alpha)} = \frac{\mathbf{P}(A_1)}{\mathbf{P}(A_\alpha)} = \frac{0.5}{1 - \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2 - \alpha}.$$

Otse tingliku tõenäosuse definitsioonist järelduvad järgnevad reeglid sündmuste korrutiste tõenäosuste arvutamiseks.

Lemma 1.4.2 (Tõenäosuste korrutamislause) *Kehtivad valemid*

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B|A).$$

ja

$$\mathbf{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2|A_1)\mathbf{P}(A_3|A_2 \cap A_1) \cdots \mathbf{P}(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

Tõestus. Esimene järeldub vahetult definitsioonist, teine on ülesanne. ∎

Tõenäosuste korrutamislause on väga kasulik ning selle ebil on hõlpsasti võimalik lahendada ka meile juba tuttavaid ülesandeid.

Näited (korrutamislause):

1. Kaardipakist valitakse kolm kaarti. Leiame tõenäosuse, et need on võtmise järjekorras risti emand, poti kümme ning viimasena mingi punase masti kaart. Selleks tähistame sündmused $A = \{$esimesena võetakse risti emand $\}$, $B = \{$ teisena võetakse poti kümme $\}$ ning $C = \{$ kolmandana võetakse punane kaart $\}$. Siis

$$\mathbf{P}(A \cap B \cap C) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B|A)\mathbf{P}(C|AB) = \frac{1}{52} \cdot \frac{1}{51} \cdot \frac{26}{50} = \frac{1}{5508}.$$

2. N inimest viskavad urni ühe kuuli. Pärast kuulid segatakse ning igaüks võtab välja ühe. Leida tõenäosus, et igaüks saab oma kuuli.
Klassikaline tõenäosus: kuulide võtmise järjekord on permutatsioon N-st. Kõikvõimalikest permutatsioonidest vaid üks on õige. Vastus seega $\frac{1}{N!}$. Korrutislause abil arutleme järgmiselt. Olgu A_i sündmus, et i-s inimene saab oma kuuli tagasi, $i = 1, \ldots, N$. Otsitav tõenäosus on

$$\mathbf{P}(\cap_{i=1}^N A_i) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2|A_1) \cdots \mathbf{P}(A_N|A_1 \cap \cdots A_N) = \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{N-1} \cdot \frac{1}{N-2} \cdots 1 = \frac{1}{N!}.$$

3. Urnis on 8 musta ja 4 valget kuuli. Juhuslikult võetakse tagasipanekuta kaks kuuli. Leida tõenäosus, et mõlemad on mustad.
Eeldame, et kuule võetakse võrdse tõenäosusega. Teame, et otsitav tõenäosus on (valem (1.6))

$$\frac{C_8^2 C_4^0}{C_{12}^2} = \frac{C_8^2}{C_{12}^2} = \frac{14}{33}.$$

Korrutamislause abil arutleme järgmiselt. Olgu $A_i = \{i$-s väljavõetud kuul on must $\}$, $i = 1, 2$. Otsitav tõenäosus on

$$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2|A_1) = \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} = \frac{14}{33}.$$

4. Leida tõenäosus, et pokkerikäes on:

   (a) kolm ässa ja 2 üheksat;

   (b) 2,3,4,5,6 aga mitte ühest mastist.

   (a) Leiame korrutamislause abil tõenäosuse, et esimesed kolm kaarti on ässad ja viimased kaks 9-d. See tõenäosus on
$$\frac{4}{52}\cdot\frac{3}{51}\cdot\frac{2}{50}\cdot\frac{4}{49}\cdot\frac{3}{48}.$$
   Võimalikke kombinatsioone kolme ässa ja kahe üheksa tulekuks on $\frac{5!}{2!3!}=10$, seega otsitava tõenäosuse leidmiseks tuleb ülaltoodud arv korrutada läbi 10-ga. Veenduga, et vastus ühtib varem leituga.
   (b) Korrutamislause abil leiame tõenäosuse, et esimene kaart on 2, teine 3, kolmas 4, neljas 5 ja viies 6. See tõenäosus on
$$\frac{4}{52}\cdot\frac{4}{51}\cdot\frac{4}{50}\cdot\frac{4}{49}\cdot\frac{4}{48}=\frac{4^5}{V_{52}^4}.$$
   Tõenäosus, et esimene kaart on 2, teine samast mastist 3, kolmas samast mastist 4, neljas samast mastist 5 ja viies samast mastist 6 on (korrutamislause)
$$\frac{4}{52}\cdot\frac{1}{51}\cdot\frac{1}{50}\cdot\frac{1}{49}\cdot\frac{1}{48}=\frac{4}{V_{52}^4}.$$
   Seega tõenäosus, et esimene kaart on 2, teine 3, kolmas 4, neljas 5 ja viies 6 ning nad pole samast mastist (tõenäosuse omadus 6)
$$\frac{4^5-4}{V_{52}^5}.$$
   Otsitav tõenäosus on seega
$$5!\left(\frac{4^5-4}{V_{52}^5}\right)=\frac{4^5-4}{C_{52}^5}.$$

5. Korrutamislause abil on kerge tõestada ka valem (1.9). Tõepoolest, olgu M kuulist M_1 ühte värvi, M_2 teist värvi, M_3 kolmandat värvi jne, kokku olgu k värvi: $M_1+\cdots+M_k=M$. Vaateleme sündmust { välja võetud n kuulist esimesed n_1 on esimest värvi, järgmised n_2 järgmist värvi jne $(n_1+\cdots+n_k=n)$ }. Olgu $A_i^1=\{i$-s kuul on esimest värvi $\}$, $i=1,\dots,n_1$. Olgu $A_i^2=\{i$-s kuul on teist värvi $\}$, $i=n_1+1,\dots,n_1+n_2$ jne. Lõpuks defineerime sündmused $A_i^k=\{i$-s kuul on k-ndat värvi $\}$, $i=n_{k-1}+1,\dots,n$. Otsitav tõenäosus on
$$\mathbf{P}(A_1^1\cap\cdots\cap A_{n_1}^1\cap A_{n_1+1}^2\cap\cdots\cap A_{n_1+n_2}^2\cap\cdots\cap A_{n_1+\cdots+n_{k-1}+1}^k\cap\cdots\cap A_n^k)=$$
$$\Big(\frac{M_1}{M}\Big)\Big(\frac{M_1-1}{M-1}\Big)\cdots\Big(\frac{M_1-n_1+1}{M-n_1+1}\Big)\Big(\frac{M_2}{M-n_1}\Big)\Big(\frac{M_2-1}{M-n_1-1}\Big)\cdots\Big(\frac{M_2-n_2+1}{M-n_1-n_2+1}\Big)\cdots$$
$$\cdots\Big(\frac{M_k}{M-(n_1+\cdots+n_{k-1})}\Big)\cdots\Big(\frac{M_k-n_k+1}{M-n+1}\Big)$$
$$=\frac{\big(M_1\cdots(M-n_1+1)\big)\big(M_2\cdots(M-n_2+1)\big)\cdots\big(M_k\cdots(M-n_k+1)\big)}{M(M-1)\cdots(M-n+1)}=\frac{V_{M_1}^{n_1}\cdots V_{M_k}^{n_k}}{V_M^n}$$

6. 52 kaarti jagati välja 4 mängija vahel. Leida tõenäosus, et:

   (a) üks mängija saab kõik ärtud;

   (b) iga mängija saab ühe ässa.

   (a) Olgu $A_1 = \{$ üks mängija saab ärtu ässa $\}$, $A_2 = \{$ ärtu äss ja kuningas on samas käes $\}$, $A_3 = \{$ ärtu äss, kuningas ja emand on samas käes $\}$, jne. Seega $A_{13} = \{$ kõik ärtud on samas käes $\}$. On selge, et

   $$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots \supset A_{13}.$$

   Meid huvitav tõenäosus on

   $$\mathbf{P}(A_{13}) = \mathbf{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{13}) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2|A_1)\mathbf{P}(A_3|A_1 \cap A_2)\cdots\mathbf{P}(A_{13}|A_1 \cap \cdots \cap A_{12}).$$

   On selge, et $\mathbf{P}(A_1) = 1$. Edasi vaatleme võimalusi ärtude paigutamiseks. Pärast ärtu ässa välja jagamist on ärtu kuninga jaoks on 51 võimalust. Neist 12 vastavad ässaga samale käele. Seega $\mathbf{P}(A_2|A_1) = \frac{12}{51}$. Pärast ässa ja kuninga jagamist samasse kätte on ärtu emanda jaoks 50 võimalust. Neist 11 on kuninga ja ässaga samas käes. Seega $\mathbf{P}(A_3|A_1 \cap A_2) = \mathbf{P}(A_3|A_2) = \frac{11}{50}$ jne. seega

   $$\mathbf{P}(A_{13}) = 1 \cdot \frac{12}{51} \cdot \frac{11}{50} \cdots \frac{1}{39} = \frac{12!}{51 \cdots 39} = 4\frac{13!}{52 \cdot 51 \cdots 39} = \frac{4}{C_{52}^{13}}.$$

   (b) Olgu $A_1 = \{$ üks mängija saab ärtu ässa $\}$, $A_2 = \{$ ärtu äss ja poti äss on erinevates kätes $\}$, $A_3 = \{$ ärtu äss, poti äss ja risti äss on erinevates käes $\}$, $A_3 = \{$ ärtu äss, poti äss ja risti äss on erinevates käes $\}$ $A_4 = \{$ kõik ässad on erinevates kätes $\}$.

   $$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset A_4.$$

   Meid huvitav tõenäosus on

   $$\mathbf{P}(A_4) = \mathbf{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_4) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2|A_1)\mathbf{P}(A_3|A_1 \cap A_2)\mathbf{P}(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

   On selga, et $\mathbf{P}(A_1) = 1$. Pärast ärtu ässa väljajagamist on poti ässa valikuks 51 kohta, millest 39 on ärtu ässast erinevates kätes. Seega $\mathbf{P}(A_2|A_1) = \frac{39}{51}$. Pärast seda kui ärtu ja poti ässad on erinevates kätes, on risti ässa jaoks 50 võimalust, millest 26 on erinevates kätes. Siis $\mathbf{P}(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{26}{50}$. Lõpuks, $\mathbf{P}(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{13}{49}$ ning otsitav tõenäosus on

   $$\frac{39 \cdot 26 \cdot 13}{51 \cdot 50 \cdot 49}.$$

7. Olgu urnis k erinevat värvi kuuli (vastavalt $M_1, \ldots, M_k, M_1 + \cdots + M_k = M$). Tagasipanekuga võetakse välja n kuuli. Leida tõenäosus, et neist esimesed n_1 on esimest värvi, järgmised n_2 teist värvi jne, $n_1 + \cdots + n_k = n$.
   Olgu $A_i^j = \{i$-s kuul on j-ndat värvi $\}$. Otsitav tõenäosus

   $$\mathbf{P}\big((\cap_{i=1}^{n_1} A_i^1) \cap (\cap_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} A_i^2) \cap \cdots \cap (\cap_{i=n_1+\cdots+n_{k-1}+1}^{n} A_i^k)\big).$$

   Tagasipanekuga urni skeemi korral i-nda palli värv ei sõltu eelmiste kuulida värvidest, st iga värvi l ning värvide $l_1, \ldots l_i$ korral

   $$\mathbf{P}(A_{i+1}^l | A_1^{l_1} \cap \cdots \cap A_i^{l_i}) = \mathbf{P}(A_{i+1}^l) = \frac{M_l}{M}.$$

Seega

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{P}\big((\cap_{i=1}^{n_1} A_i^1) \cap (\cap_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} A_i^2) \cap \cdots \cap (\cap_{i=n_1+\cdots+n_{k-1}+1}^{n} A_i^k)\big) = \\
&\prod_{i=1}^{n_1} \Big(\frac{M_1}{M}\Big) \prod_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} \Big(\frac{M_2}{M}\Big) \cdots \prod_{i=n_1+\cdots n_{k-1}+1}^{n} \Big(\frac{M_k}{M}\Big) = \\
&\Big(\frac{M_1}{M}\Big)^{n_1} \Big(\frac{M_2}{M}\Big)^{n_2} \cdots \Big(\frac{M_k}{M}\Big)^{n_k}.
\end{aligned}
$$

Siit saame multinomiaaljaotuse valemi (1.12).

1.4.2 Täistõenäosuse ja Bayesi valem

Mõnikord on loomulik sündmuste ruum Ω jagada üksteist paarikaupa välistavateks osadeks $B_1,\ B_2, \ldots, B_n$, st sellisteks osadeks $B_i,\ i = 1, \ldots, n$, et kehtivad omadused

$$
\mathbf{P}(B_i) \neq 0,\ i = 1, 2, \ldots, n; \quad B_i \cap B_j = \emptyset, \quad i \neq j; \quad \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega. \tag{1.17}
$$

Selliste sündmuste komplekti $B_i,\ i = 1, \ldots, n$ nimetatakse **sündmuste täissüsteemiks**. Sel juhul on võimalik kasutada tinglike tõenäosuseid suvalise sündmuse A tõenäosuse arvutamisel.

Lemma 1.4.3 (Täistõenäosuse valem). *Rahuldagu sündmused $B_i \in \mathcal{F},\ i = 1, \ldots, n$ tingimusi (1.17). Siis iga sündmuse $A \in \mathcal{F}$ korral kehtib võrdus*

$$
\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(B_i)\mathbf{P}(A|B_i).
$$

Tõestus. $A = \cup_{i=1}^{n}(A \cap B_i)$. Et sündmused $A \cap B_1, \ldots, A \cap B_n$ on üksteist välistavad, siis

$$
\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A|B_i)\mathbf{P}(B_i).
$$

■

Lemma 1.4.1 tõttu kehtib täistõenäosuse valem ka tinglike tõenäosuste korral. Seega, kui $B_1, \ldots, B_n$ on täissüsteem, C mingi sündmus ja $\mathbf{Q}(A) = \mathbf{P}(A|C)$, siis

$$
\mathbf{P}(A|C) = \mathbf{Q}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{Q}(A|B_i)\mathbf{Q}(B_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A|B_i \cap C)\mathbf{P}(B_i|C), \tag{1.18}
$$

sest (ülesanne)

$$
\mathbf{Q}(A|B) = \mathbf{P}(A|B \cap C).
$$

Märkus. Täsitõenäosuse valemi kehtimiseks ei pea sündmused B_i tingimata moodustama täissüsteemi, vaid piisab sellest, et sündmused $A \cap B_i$ oleks vastastikku välistavad ning et $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i$.

Näited: (täistõenäosuse valem)

1. Oletame, et meil on rahakotis kolm münti, millest kaks on ausad, kuid kolmandal on kirja tulemise tõenäosus 0.6. Leiame kirja tulemise tõenäosuse juhuslikult valitud mündi viskamisel. Selleks olgu A sündmus, et tuleb kiri; B_1 sündmus, et valiti aus münt ning B_2 sündmus, et valiti ebaaus münt. Täistõenäosuse valemi kohaselt siis

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B_1)\mathbf{P}(A|B_1) + \mathbf{P}(B_2)\mathbf{P}(A|B_2) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5} = \frac{8}{15}.$$

2. Ühes urnis on 3 valget, 1 must ja 3 punast kuuli, teises urnis 1 valge, 4 musta ja 1 punane. Esimesest urnist võetakse kuul ja pannakse teise. Siis võetakse pall teisest urnist. Leida tõenäosus, et see on valge. Olgu $A = \{$ teisest urnist võetakse valge $\}$, $B = \{$ esimesest urnist võetakse valge kuul $\}$. Nüüd

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A|B)\mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(A|\bar{B})\mathbf{P}(\bar{B}) = \frac{2}{7}\cdot\frac{3}{7} + \frac{1}{7}\cdot\frac{4}{7} = \frac{10}{49}.$$

3. Üliõpilastest veerand on esimese kursuse tudengid, pool teise kursuse tudengid ja veerand kolmanda kursuse tudengid. Tõenäosus, et i-nda kursuse tudeng sooritab eksami on p_i, $i = 1, 2, 3$. Leida tõenäosus:

   (a) juhuslikult valitud tudeng sooritab eksami;

   (b) juhuslikult valitud tudeng sooritab eksami teisel katsel, kui on teada, et esimesl katsel ta kukkus läbi ning teise katse tulemus ei sõltu esimesest katsest.

   (a) $A = \{$ tudeng sooritab eksami $\}$, $B_i = \{$ tudeng on i-ndal kursusel $\}$. Täistõenäosuse valem

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^{3}\mathbf{P}(A|B_i)\mathbf{P}(B_i) = \sum_{i=1}^{3}p_i\mathbf{P}(B_i) = \frac{p_1}{4} + \frac{2p_2}{4} + \frac{p_3}{4},$$

   sest $\mathbf{P}(B_1) = \mathbf{P}(B_3) = \frac{1}{4}$ ja $\mathbf{P}(B_2) = \frac{1}{2}$.

   (b) Olgu $A = \{$tudeng sooritab eksami teisel katsel$\}$, $C = \{$tudeng kukub esimesel katsel läbi$\}$. Seega

$$\mathbf{P}(A|C) = \sum_{i=1}^{3}\mathbf{P}(A|B_i\cap C)\mathbf{P}(B_i|C).$$

   Arvestades, et esimene katse ei mõjuta teist, saame $\mathbf{P}(A|B_i\cap C) = \mathbf{P}(A|B_i) = p_i$. Leiame $\mathbf{P}(B_i|C)$. Selleks kasutame tingliku tõenäosuse valemit:

$$\mathbf{P}(B_i|C) = \frac{\mathbf{P}(C\cap B_i)}{\mathbf{P}(C)} = \frac{\mathbf{P}(C|B_i)\mathbf{P}(B_i)}{\mathbf{P}(C)} = \frac{(1-p_i)\mathbf{P}(B_i)}{1-(\sum_{i=1}^{3}p_i\mathbf{P}(B_i))} = \frac{(1-p_i)\mathbf{P}(B_i)}{\sum_{i=1}^{3}(1-p_i)\mathbf{P}(B_i)}.$$

   Otsitav tõenäosus seega

$$\mathbf{P}(A|C) = \sum_{i=1}^{3}p_i\frac{(1-p_i)\mathbf{P}(B_i)}{\sum_{i=1}^{3}(1-p_i)\mathbf{P}(B_i)} = \frac{\sum_{i=1}^{3}p_i(1-p_i)\mathbf{P}(B_i)}{\sum_{i=1}^{3}(1-p_i)\mathbf{P}(B_i)}.$$

4. (a) Kaks ettevõttet toodavad arvuteid. Ettevõtte X toodangust on 20 % defektsed, ettevõtte Y toodangust on 5% praak. Samas X toodab kaks korda rohkem arvuteid kui Y. Leida tõenäosus, et valitud arvuti pole praak.
Olgu $B = \{\text{valitud arvuti on toodetud tehases X}\}$, $A = \{\text{valitud arvuti pole praak}\}$. Täistõenäosuse valem

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A|B)\mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(A|\bar{B})\mathbf{P}(\bar{B}) = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} + \frac{19}{20} \cdot \frac{1}{3} = \frac{51}{60}.$$

(b) Arvutitööstus läks Hiinasse. Ettevõte X toodangust 10% valmistatakse Hiinas; ettevõtte Y toodangust 20 % toodetakse Hiinas. Hiinas tootmine on odavam, mistõttu ettevõttel Y hakkas minema hästi ning nüüd toodavad nad kaks korda sama palju kui ettevõte X. Kahjuks on Hiinas toodetud arvutitest 25%praak. Kas Hiinas tootmine toob tarbijale (kvaliteedi mõttes) kahju?
Leiame jällegi tõenäosuse, et (juhuslikult) valitud arvuti pole praak. Sündmused on järgmised: $A = \{\text{valitud arvuti pole praak}\}$, $B = \{\text{valitud arvuti on toodetud ettevõttes X}\}$, $C = \{\text{valitud arvuti on toodetud Hiinas}\}$. Vaatleme nelja sündmust: $B \cap C, B \cap \bar{C}, \bar{B} \cap C, \bar{B} \cap \bar{C}$. Sündmused moodustavad täissüsteemi (miks?) Täistõenäosuse valem

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A|B \cap C)\mathbf{P}(B \cap C) + \mathbf{P}(A|\bar{B} \cap C)\mathbf{P}(\bar{B} \cap C) + \mathbf{P}(A|B \cap \bar{C})\mathbf{P}(B \cap \bar{C}) + \mathbf{P}(A|\bar{B} \cap \bar{C})\mathbf{P}(\bar{B} \cap \bar{C}).$$

Kui arvuti on toodetud Hiinas, siis – sõltumata sellest, millise kaubamärgi all teda müüakse – on ta praak tõenäosusega 0.25. Seega $\mathbf{P}(A|B \cap C) = \mathbf{P}(A|\bar{B} \cap C) = \frac{3}{4}$. Kui arvuti pole toodetud Hiinas, siis tõenäosus, et ta on praak sõltub tehasest. Seega $\mathbf{P}(A|\bar{B} \cap \bar{C}) = \frac{19}{20}$ ning $\mathbf{P}(A|B \cap \bar{C}) = \frac{4}{5}$. Korrutamislause:

$$\mathbf{P}(B \cap C) = \mathbf{P}(C|B)\mathbf{P}(B) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{3}, \quad \mathbf{P}(B \cap \bar{C}) = \mathbf{P}(\bar{C}|B)\mathbf{P}(B) = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{3}$$
$$\mathbf{P}(\bar{B} \cap C) = \mathbf{P}(C|\bar{B})\mathbf{P}(\bar{B}) = \frac{2}{10} \cdot \frac{2}{3}, \quad \mathbf{P}(\bar{B} \cap \bar{C}) = \mathbf{P}(\bar{C}|\bar{B})\mathbf{P}(\bar{B}) = \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{3}.$$

Seega

$$\mathbf{P}(A) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{2}{3} + \frac{4}{5} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{3} + \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{19}{20} = \frac{523}{600} > \frac{51}{60}.$$

Kuigi kummagi ettevõtte praagiprotsent suurenes, praagiprotsent kõikide arvutite seas hoopis vähenes. Miks?

Täistõenäosuse valemi abil on kerge leida sündmuse B_i tinglikku tõenäosust tingimusel, et sündmus A on toimunud. See on nn **Bayesi valem**.

Lemma 1.4.4 (Bayesi valem) *Olgu B_i, $i = 1, \dots, n$ tingimusi (1.17) rahuldav sündmuste täissüsteem. Siis kehtib valem*

$$\mathbf{P}(B_j|A) = \frac{\mathbf{P}(B_j)\mathbf{P}(A|B_j)}{\sum_{i=1}^n \mathbf{P}(B_i)\mathbf{P}(A|B_i)}, \quad j \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad A \in \mathcal{F}.$$

Tõestus. Definitsiooni põhjal saame

$$\mathbf{P}(B_j|A) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B_j)}{\mathbf{P}(A)}.$$

Kasutades tõenäosuste korrutamise reeglit ning täistõenäosuse valemit, saame

$$\mathbf{P}(A \cap B_j) = \mathbf{P}(B_j)\mathbf{P}(A|B_j), \quad \mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(B_i)\mathbf{P}(A|B_i),$$

seega kehtib lemmas toodud võrdus. ■

Märkus. Sageli on kasulik ka Bayesi valemi lihtsustatud (ilma sündmuste täissüsteemita) versioon

$$\mathbf{P}(B|A) = \frac{\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(A|B)}{\mathbf{P}(A)}.$$

Näited: (Bayesi valem)

1. Vaatame täistõenäosuse valemi näidet 1. Oletame, et mündi viskel saadi kiri. Leiame tingliku tõenäosuse, et visatud münt on ebaaus. Bayesi valemi kohaselt

$$\mathbf{P}(B_2|A) = \frac{\mathbf{P}(B_2)P(A|B_2)}{\mathbf{P}(B_1)\mathbf{P}(A|B_1) + \mathbf{P}(B_2)\mathbf{P}(A|B_2)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{10}}{\frac{8}{15}} = \frac{3}{8}.$$

   Siin kasutasime teadmist, et nimetajas olev summa on tegelikult sündmuse A tõenäosus, mis on juba arvutatud.

2. Vaatame täistõenäosuse valemi näidet 2. Leiame tõenäosuse, et esimesest urnist võetakse punane kuul tingimusel, et teisest võeti valge.
   Olgu $A = \{\text{teisest urnist võetakse valge}\}$, $C = \{\text{esimesest urnist võetakse punane kuul}\}$. Eelnevast teame, et $\mathbf{P}(A) = \frac{10}{49}$. Bayesi valem

$$\mathbf{P}(C|A) = \frac{\mathbf{P}(A|C)\mathbf{P}(C)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\frac{1}{7} \cdot \frac{3}{7}}{\frac{10}{49}} = \frac{3}{10}.$$

3. Haruldase ja raske haiguse diagnoosimiseks kasutatakse teatavat meditsiinilist testi. Kui inimesel on see haigus, siis 99-l juhul sajast test seda ka näitab. Kui aga inimesel seda haigust pole, näitab test haigust ühel juhul sajast. Samas on haigus väga haruldane, olles vaid ühel inimesel 100 000-st. Kirjeldatud testi põhjal diagnoositi inimesel haigus. Leida tõenäosus, et inimene on haige.
   Olgu $H = \{\text{inimesel on haigus}\}$, $B = \{\text{diagnoos positiivne}\}$. Bayesi valem

$$\mathbf{P}(H|B) = \frac{\mathbf{P}(B|H)\mathbf{P}(H)}{\mathbf{P}(B|H)\mathbf{P}(H) + \mathbf{P}(B|\bar{H})\mathbf{P}(\bar{H})} = \frac{\frac{99}{100} \cdot \frac{1}{100000}}{\frac{99}{100} \cdot \frac{1}{100000} + \frac{1}{100} \cdot \frac{99999}{100000}} = \frac{99}{99 + 99999} \approx \frac{1}{1011}.$$

4. Oletame, et 20% elanikkonnast on vasakukäelised. Arreteeritud on vasakukäeline kahtlusalune. Uurija hinnangul on kahtlusalune süüdi tõenäosusega 0.5. Siis selgub, et kuritöö on toime pannud vasakukäeline. Kui suur on nüüd tõenäosus, et kahtlusalune on süüdi.
   Olgu $A = \{\text{ kahtlusalune on süüdi }\}$, $B = \{\text{ süüdlane on vasakukäeline }\}$. Bayesi valem

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(B|A)\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B|A)\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B|\bar{A})\mathbf{P}(\bar{A})} = \frac{1 \cdot 0.5}{1 \cdot 0.5 + 0.2 \cdot 0.5} = \frac{5}{6}.$$

5. Mounty Halli paradoks. Telemängus on 3 kinnist kappi. Neist ühes on hinnaline auhind, teistes pastakas. Mängija valib ühe kapi. Enne valitud kapi avamist avab saatejuht (Mounty Hall) ühe kahest ülejäänud kapist ja seal on alati pastakas. Seejärel pakub saatejuht võimalust mängijal kappi vahetada. Kas tasub vahetada? Või vahet pole?
Oletame nüüd, et pastakaid on kaht värvi: must ja sinine. Pärast mängija valikut avab saatejuht alati selle kapi kus on pastakas. Kui aga on võimalik kahe kapi vahel, valib ta sinise pastaka tõenäosusega b. Seejärel pakub ta võimalust kappi vahetada. Mängija otsustab jääda esialgse valiku juurde. Leida tõenäosus, et ta võidab auhinna, tingimusel, et nähtud pastakas oli sinine.
$A = \{$ valitud kapis on auhind $\}$, $S = \{$ valitud kapis on sinine pastakas $\}$, $M = \{$ valitud kapis on must pastakas $\}$, $S' = \{$ mängija nägi sinist pastakat $\}$. Kui mängija kappi ei vaheta, saab ta auhinna vaid siis kui kehtib A. Meid huvitav tõenäosus:

$$\mathbf{P}(A|S') = \frac{\mathbf{P}(S'|A)\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(S'|A)\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(S'|S)\mathbf{P}(S) + \mathbf{P}(S'|M)\mathbf{P}(M)} = \frac{b \cdot \frac{1}{3}}{b \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{b}{b+1}.$$

1.4.3 Sõltumatud sündmused

Väga sageli on intuitiivselt selge, et ühe katse tulemus on täiesti sõltumatu teise katse tulemusest. Sellisel juhul on ka iga esimese katse tulemusega määratud sündmus sõltumatu teise katse tulemusest sõltuva sündmusega: sündmused on sõltumatud. Sõltumatute sündmuste A ja B korral ei mõjuta A toimumine või mittetoimumine kuidagi B toimumist. Siit järeldub, et A toimumine ei muuda B toimumise tõenäosust, st $\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(B)$. Tingliku tõenäosuse definitsioonist saame, toodud võrdus on ekvivalentne järgmise võrdusega:

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B). \tag{1.19}$$

Definitsioon 1.4.2 *Sündmusi A ja B nimetatakse* **sõltumatuteks**, *kui kehtib (1.19).*

Märkused:

1. Erinevalt tingliku tõenäosuse definitsioonist võib nii A kui ka B tõenäosus olla 0.

2. Kui A ja B on sõltumatud, siis on sõltumatud ka sündmused:

   (a) $\bar{A}$ ja B;

   (b) $\bar{B}$ ja A;

   (c) $\bar{B}$ ja $\bar{A}$.

   Tõestame (a). Olgu A ja B sõltumatud. Siis

   $$\mathbf{P}(\bar{A} \cap B) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(B \cap A) = \mathbf{P}(B)(1 - \mathbf{P}(A)) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(\bar{A}).$$

   Nüüd (b) ja (c) järelduvad vahetult.

3. Sündmus, mille tõenäosus on 0 või 1 on sõltumatu igast teisest sündmusest, kaasaarvatud iseendast.
Tõepoolest, olgu $\mathbf{P}(A) = 0$ ja B suvaline sündmus. Veendu, et $0 = \mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) = 0$. Kui $\mathbf{P}(A) = 1$, siis $\mathbf{P}(\bar{A}) = 0$, mistõttu ka sündmus, mille tõenäosus on 1 on sõltumatu igast teisest sündmusest.

4. Kui A ja B on sõltumatud ja $\mathbf{P}(A) > 0$ ning $\mathbf{P}(B) > 0$, siis $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A)$ ja $\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(B)$. Ülaltoodust järeldub, et sellisel juhul ka $\mathbf{P}(A|\bar{B}) = \mathbf{P}(A)$, $\mathbf{P}(\bar{A}|\bar{B}) = \mathbf{P}(\bar{A})$ ning $\mathbf{P}(\bar{A}|B) = \mathbf{P}(\bar{A})$.

Sageli informatsioon ühe sündmuse toimumise kohta suurendab või vähendab teise sündmuse toimumise tõenäosust. Sel juhul on tegemist sõltuvate ehk korreleeritud sündmustega.

Definitsioon 1.4.3 *Sündmusi A ja B nimetatakse* **positiivselt korreleerituteks**, *kui* $\mathbf{P}(A|B) > \mathbf{P}(A)$ *ning* **negatiivselt korreleerituteks**, *kui* $\mathbf{P}(A|B) < \mathbf{P}(A)$.

Enam kui kahe sündmuse sõltumatus defineeritakse järgmiselt.

Definitsioon 1.4.4 *Sündmusi $A_1, \ldots, A_n$ nimetatakse* **sõltumatuteks**, *kui iga arvu $k \in \{2, 3, \ldots, n\}$ ja iga võrratusi $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$ rahuldava indeksite komplekti korral kehtib võrdus*

$$\mathbf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \mathbf{P}(A_{i_1})\mathbf{P}(A_{i_2}) \ldots \mathbf{P}(A_{i_k}). \tag{1.20}$$

Definitsioonist tuleneb, et kolm sündmust A, B ja C on täielikult sõltumatud, kui kehtivad võrdused

$$P(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B),\ \mathbf{P}(A \cap C) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(C),\ \mathbf{P}(B \cap C) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C),$$
$$\mathbf{P}(A \cap B \cap C) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C).$$

Seega $A_1, \ldots, A_n$ on sõltumatud, kui kõik paarid A_i, A_j $(i < j)$ on sõltumatud, kõik kolmikud A_i, A_j, A_k $(i < j < k)$ on sõltumatud, kõik nelikud on sõltumatud jne.

Ülesanne: Veendu, et kui $A_1, \ldots, A_n$ on sõltumatud, siis on sõltumatud ka sündmused $B_1, \ldots, B_n$, kus $B_i \in \{A_i, \bar{A}_i\}$. (Näita, et $\bar{A}_1, A_2, \ldots, A_n$ on sõltumatud ja järelda sellest kõik muu).

Definitsioon 1.4.5 *Sündmusi $A_1, \ldots, A_n$ nimetatakse* **paarikaupa sõltumatuteks**, *kui kõik paarid A_i, A_j $(1 \leq i < j \leq n)$ on sõltumatud.*

Kahe sündmuse korral langevad sõltumatus ja paarikaupa sõltumatus kokku. Üldiselt see nii pole: sõltumatud sündmused on ka paarikaupa sõltumatud (miks?), kuid paarikaupa sõltumatud sündmused ei pruugi sõltumatud olla.

Märgime veel, et lõpmatut hulka sündmusi $\{A_\alpha\}$ (võib olla mitteloenduv) nimetatakse sõltumatuteks, kui iga lõplik alamhulk sündmusi on sõltumatud.

Definitsioon 1.4.6 *Olgu B mingi positiivse tõenäosusega sündmus, st $\mathbf{P}(B) > 0$. Sündmusi $A_1, \ldots, A_n$ nimetatakse* **tinglikult sõltumatuks tingimusel et B on toimunud**, *kui iga arvu $k \in \{2, 3, \ldots, n\}$ ja iga võrratusi $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$ rahuldava indeksite komplekti korral kehtib võrdus*

$$\mathbf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}|B) = \mathbf{P}(A_{i_1}|B)\mathbf{P}(A_{i_2}|B) \ldots \mathbf{P}(A_{i_k}|B). \tag{1.21}$$

Seega tinglik sõltumatus pole midagi muud kui sõltumatus tõenäosusmõõdu $\mathbf{Q}(A) := \mathbf{P}(A|B)$ korral.

Näited: (sõltumatud ja sõltuvad sündmused)

1. Kaardipakist (52) võetakse 2 kaarti. Sündmused $A = \{$võetud kaart on risti$\}$ ja $B = \{$võetud kaart on äss$\}$ on sõltumatud, sest
$$\mathbf{P}(A \cap B) = \frac{1}{52} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{52} = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B).$$

2. Münti visatakse 2 korda, kõik 4 tulemust on võrdtõenäolised. Sündmused $A = \{$ esimesel mündil tuleb vapp $\}$, $B = \{$ teisel mündil tuleb vapp $\}$ on sõltumatud, sest
$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(vv) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbf{P}(\{vv, vk\}) \cdot \mathbf{P}\big(\{vv, kv\}\big) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B).$$

3. Täringut visatakse 2 korda. Kas järgmised sündmused on sõltumatud:

   (a) $A = \{$ esimene vise on 4 $\}$, $B = \{$ visete summa on 6 $\}$;
   (b) $A = \{$ esimene vise on 4 $\}$, $B = \{$ visete summa on 7 $\}$.

   (a) $\mathbf{P}(A \cap B) = \frac{1}{36}$, $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{6}$ ja $\mathbf{P}(B) = \frac{5}{36}$. Et $\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{36} \neq \frac{1}{36}$, pole sündmused sõltumatud.
   (b) ise.

4. Visatakse kaks korda münti. Olgu A sündmus, et tuli kaks kulli, B_1 sündmus, et tuli vähemalt üks kull ning B_2 sündmus, et esimesel viskel tuli kiri. Kuna
$$\mathbf{P}(A|B_1) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B_1)}{\mathbf{P}(B_1)} = \frac{\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B_1)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3} > \frac{1}{4} = \mathbf{P}(A),$$
siis A ja B_1 on positiivselt korreleeritud (sündmuse B_1 toimumine suurendab A toimumise tõenäosust). Et A ja B_2 on teineteist välistavad sündmused, siis
$$\mathbf{P}(A|B_2) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B_2)}{\mathbf{P}(B_2)} = 0 < \mathbf{P}(A),$$
siis A ja B_2 on negatiivselt korreleeritud sündmused.

5. Visatakse kolm korda ausat münti. Olgu sündmused A, B ja C defineeritud järgnevalt:
$A = \{$ esimesel ja teisel viskel tuleb kokku täpselt üks vapp $\}$;
$B = \{$ esimesel ja kolmandal viskel tuleb kokku täpselt üks vapp $\}$;
$C = \{$ teisel ja kolmandal viskel tuleb kokku täpselt üks vapp $\}$;
Sel juhul
$$A = \{vkk, vkv, kvk, kvv\},\ B = \{vvk, vkk, kvv, kkv\},\ C = \{vvk, kvk, vkv, kkv\}.$$
Saame $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(C) = \frac{1}{2}$ ning
$$\mathbf{P}(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{\Omega} = \frac{|\{vkk, kvv\}|}{8} = \frac{1}{4} = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B),$$
$$\mathbf{P}(A \cap C) = \frac{1}{4} = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(C),$$
$$\mathbf{P}(B \cap C) = \frac{1}{4} = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C),$$
mistõttu sündmuste paarid A ja B, A ja C ning B ja C on kõik sõltumatud ja sündmused A, B, C seega paarikaupa sõltumatud. Et aga $A \cap B \cap C = \emptyset$, siis $\mathbf{P}(A \cap B \cap C) = 0 \neq \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C)$ ning järelikult sündmused A, B ja C ei ole sõltumatud.

6. Tehti n sõltumatut katset. Igal katsel on võib sündmus toimuda või mitte toimuda. Sündmuse toimumise tõenäosus on p. Tõenäosus, et n-katsest toimus täpselt r sündmust on leitav **binoomjaotuse valemiga:**

$$\frac{n!}{r!(n-r)!}p^r(1-p)^{n-r} = C_n^r p^r(1-p)^{n-r}. \tag{1.22}$$

Teame, et r sündmuse paigutuseks n katse jooksul on $\frac{n!}{r!(n-r)!}$ võimalust. Need võimalused on üksteist välistavad (miks?), seega otsitav tõenäosus on kõikidele paigutusele vastavate tõenäosuste summa. Üks selline paigutus on järgmine: esimesel r katsel sündmus toimus, ülejäänutel mitte. Sellele paigutusele vastab sündmus $A_1 \cap \cdots \cap A_r \cap \bar{A}_{r+1} \cap \cdots \cap \bar{A}_n$, kus $A_i = \{i$-ndal katsel sündmus toimus $\}$. Et katsed on sõltumatud, on sõltumatud ka sündmused $B_1, \ldots, B_n$, kus $B_i \in \{A_i, \bar{A}_i\}$. Seega

$$\mathbf{P}\big(A_1 \cap \cdots \cap A_r \cap \bar{A}_{r+1} \cap \cdots \cap \bar{A}_n\big) = \mathbf{P}(A_1)\cdots\mathbf{P}(A_r)\mathbf{P}(\bar{A}_{r+1})\cdots\mathbf{P}(\bar{A}_n) = p^r(1-p)^{n-r}.$$

Sarnaselt arutledes saame iga k sündmuse paigutusele sama tõenäosuse. Siit (1.22).
Oletame nüüd, et katsel on k võimalikku väljundit, nende tõenäosused olgu vastavalt $p_1, \ldots, p_k$. Näiteks, kui meid huvitab kas sündmus toimus või ei toimunud, on $k = 2$ ja tõenäosused vastavalt p (sündmus toimus) ja $1-p$ (sündmus ei toimunud). Eeldades, et katsed on sõltumatud ning arutledes samamoodi kui enne, saame: tõenäosus, et n sõltumatul katsel tuleb väljund i n_i korda, $i = 1, \ldots, k$, $n_1 + \cdots + n_k = n$ (järjekorrast sõltumata) on leitav **multinomiaaljaotuse valemiga**:

$$\frac{n!}{n_1!\cdots n_k!}p_1^{n_1}\cdots p_k^{n_k}. \tag{1.23}$$

7. Tagasipanekuga urni skeem. Intuitiivselt on selge, et tagasipaneku korral on urnist kuulide võtmised sõltumatud katsed. Seda on loomulikult kerge kontrollida. Olgu urnis M kuuli, tagasipanekuga võetakse n. Olgu iga $i = 1, \ldots, n$ korral $S_i \subset \{1, \ldots, M\}$ mingi kuulide alamhulk (ei pruugi olla lõikumatud). Defineerime sündmused

$$A_i = \{i - \text{ndal korral võeti kuul hulgast} S_i\}.$$

Veendume, et sündmused A_i on sõltumatud. Valime suvalise alamhulga $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$ ja leiame

$$\mathbf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \frac{|S_{i_1}|\cdot|S_{i_2}|\cdots|S_{i_k}|M^{n-k}}{M^n} = \frac{|S_{i_1}|}{M}\cdot\frac{|S_{i_2}|}{M}\cdots\frac{|S_{i_k}|}{M} = \mathbf{P}(A_{i_1})\mathbf{P}(A_{i_2})\cdots\mathbf{P}(A_{i_k}).$$

Siit saame meile juba tuntud seosed. Olgu urnis k erivärvi kuuli, esimest värvi olgu M_1 kuuli, teist M_2 kuuli, jne. $M_1 + \cdots + M_k = M$. Vaatleme sündmusi $A_i^j = \{i$-s kuul on j-ndat värvi $\}$. Siin hulk S_i on j-ndat värvi kuulid ning $\mathbf{P}(A_i^j) = \frac{M_j}{M}$. Teame, et suvaliste värvide järjestuse $j_1, j_2, \ldots, j_n$ korral on sündmused

$$A_1^{j_1}, A_2^{j_2}, \ldots, A_n^{j_n}$$

sõltumatud. Näiteks sündmuse { esimesed n_1 kuuli on esimest värvi, järgmised n_2 kuuli on teist värvi, ..., viimased n_k kuuli on k värvi} tõenäosus on

$$\mathbf{P}(A_1^1 \cap \cdots \cap A_{n_1}^1 \cap A_{n_1+1}^2 \cap \cdots \cap A_{n_1+n_2}^2 \cap \cdots \cap A_{n_1+\cdots+n_{k-1}+1}^k \cap \cdots \cap A_n^k) =$$

$$\mathbf{P}(A_1^1)\cdots\mathbf{P}(A_1^{n_1})\mathbf{P}(A_{n_1+1}^2)\cdots\mathbf{P}(A_{n_1+n_2}^2)\cdots\mathbf{P}(A_{n_1+\cdots+n_{k-1}}^k)\cdots\mathbf{P}(A_n^k) = \Big(\frac{M_1}{M}\Big)^{n_1}\cdots\Big(\frac{M_k}{M}\Big)^{n_k}.$$

Ülaltoodud seos kehtib suvalise värvide väljavõtmise järjekorra korral (kui vaid $n_1, n_2, \dots, n_k$ jäävad samaks). Et võimalikke järjekordi on $\frac{n!}{n_1! \cdots n_k!}$ saame siit jälle multinomiaaljaotuse valemi:

$$\frac{n!}{n_1! \cdots n_k!} \Big(\frac{M_1}{M}\Big)^{n_1} \cdots \Big(\frac{M_k}{M}\Big)^{n_k}.$$

Tähistades $p_i = \frac{M_i}{M}$ saame ülaltoodud valemist valemi (1.23). Kui värve on kaks ja $\frac{M_1}{M} =: p$, saame binoomjaotuse valemi (1.22).

8. Münti, mille korral kirja tulemise tõenäosus on p visatakse niikaua kui tuleb n-kirja või m vappi. Leida tõenäosus, et enne tuleb n kirja. Pane tähele: selgumaks kas enne tuleb n kirja või m vappi, on vaja maksimaalselt $n + m - 1$ viset. Seda arvestades pane tähele, et vaadeldav ülesann on ekvivalentne järgmis ülesandega: leida tõenäosus, et $n+m-1$ viskel tuleb vähemalt n kirja. Binoomjaotuse valemit kasutades veendu, et see tõenäosus on

$$\sum_{k=n}^{m+n-1} C^k_{m+n-1} p^k (1-p)^{m+n-k-1}.$$

9. Münti, mille korral kirja tulemise tõenäosus on p visatakse kuni esimese kirja tulemiseni. Leida tõenäosus, et läheb vaja rohkem kui n viset.
Mündivisked on sõltumatud. Olgu $A_i = \{$ esimene kiri tuleb i-ndal katsel $\}$. Selle sündmuse tõenäosus on $(1-p)^{i-1}p$ (miks?) Otsitav sündmus on $\cup_{i=n+1}^{\infty} A_i$, selle tõenäosus on

$$\mathbf{P}\big(\cup_{i=n+1}^{\infty} A_i \big) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i) = \sum_{i=n}^{\infty} (1-p)^i p = (1-p)^n.$$

10. Topsis on 2 münti, esimese korral on kirja tõenäosus p_1 ja teise korral p_2, $p_1 \neq p_2$. Võetakse juhuslikult münt ja visatakse seda 2 korda. Olgu $A_i = \{$ i-ndal viskel tuleb kiri $\}$, $i = 1, 2$. Olgu $C = \{$ võetakse esimene münt $\}$. On selge, et pale mündi valikut on sündmused A_1 ja A_2 sõltumatud, st

$$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 | C) = \mathbf{P}(A_1|C)\mathbf{P}(A_2|C) = p_1^2, \quad \mathbf{P}(A_1 \cap A_2 | \bar{C}) = \mathbf{P}(A_1|\bar{C})\mathbf{P}(A_2|\bar{C}) = p_2^2.$$

Samas pole sündmused A_1 ja A_2 sõltumatud, sest

$$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbf{P}(A_1 \cap A_2|C)\frac{1}{2} + \mathbf{P}(A_1 \cap A_2|\bar{C})\frac{1}{2} = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} \neq \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2) = \big(\frac{p_1+p_2}{2}\big)^2.$$

11. Topsis on $k+1$ münti. Neist i-nda korral on kirja tulemise tõenäosus $\frac{i}{k}$. Sealt topsist võetakse juhuslikult münt ja visatakse seda n korda. Tulid ainul kirjad. Leida (tinglik) täenäosus, et:

   (a) võeti i-s münt ($i = 0, \dots, k$)

   (b) järgmine vist tuleb samuti kiri.

   Olgu $C_i = \{$ võeti i-s münt $\}$, $A = \{n$ esimest viset on kiri $\}$, $B = \{$järgmine vise on ka kiri$\}$.
   (a) Bayesi valem

$$\mathbf{P}(C_i|A) = \frac{\mathbf{P}(A|C_i)\mathbf{P}(C_i)}{\sum_{i=0}^n \mathbf{P}(A|C_i)\mathbf{P}(C_i)} = \frac{(\frac{i}{k})^n}{\sum_{i=1}^k (\frac{i}{k})^n}.$$

(b) Pärast seda kui münt on valitud, on visked tinglikult sõltumatud, millest saame, et iga i korral $\mathbf{P}(A \cap B|C_i) = \mathbf{P}(A|C_i)\mathbf{P}(B|C_i)$. Sellest järeldub, et

$$\mathbf{P}(B|C_i \cap A) = \frac{\mathbf{P}(B \cap A \cap C_i)}{\mathbf{P}(A \cap C_i)} = \frac{\mathbf{P}(B \cap A|C_i)}{\mathbf{P}(A|C_i)} = \mathbf{P}(B|C_i) = \frac{1}{k}.$$

Valem (1.18)

$$\mathbf{P}(B|A) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}(B|C_i \cap A)\mathbf{P}(C_i|A) = \sum_{i=0}^{n} \frac{i}{k} \frac{(\frac{i}{k})^n}{\sum_{i=1}^{k}(\frac{i}{k})^n} = \frac{\sum_{i=0}^{n}(\frac{i}{k})^{n+1}}{\sum_{i=0}^{n}(\frac{i}{k})^n}.$$

Et suure k korral

$$\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{i}{k}\right)^n \approx \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}, \quad \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{i}{k}\right)^{n+1} \approx \int_0^1 x^{n+1} dx = \frac{1}{n+2},$$

saame (suure k korral)

$$\mathbf{P}(B|A) \approx \frac{n+1}{n+2}.$$

Peatükk 2

Juhuslikud suurused

2.1 Juhuslik suurus, selle jaotusfunktsioon

2.1.1 Juhusliku suuruse definitsioon

Olgu meil antud tõenäosusruum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Sageli pakuvad meile huvi sündmused, mis on seotud katsetulemustest sõltuvate funktsioonide (ehk juhuslike suuruste) väärtustega.

Näited: (elementaarsündmuste funktsioonid, juhuslikud suurused)

1. Ausat münti visatakse kolm korda. Vastav diskreetne tõenäosusruum on järgmine $\Omega = \{kkk, vkk, kvk, kkv, kvv, vkv, vvk, vvv\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$, $\mathbf{P}(w_i) = \frac{1}{8}$ iga i korral. Oletame, et meid huvitab kirjade arv. Kirjade arv, tähistame selle X, on järgmine funktsioon

$$X : \Omega \mapsto \mathbb{R}, \quad X(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{kui } \omega = vvv; \\ 1, & \text{kui } \omega \in \{kvv, vkv, vvk\}; \\ 2, & \text{kui } \omega \in \{kkv, vkk, kvk\}; \\ 3, & \text{kui } \omega = kkk. \end{cases}$$

   Sündmuse $A = \{$ tuleb vähemalt 2 kulli $\}$ võib nüüd kirjutada $A = \{\omega : X(\omega) \geq 2\}$. Sündmuse $B = \{$ kolm korda tuleb vapp $\}$ võib nüüd kirjutada $B = \{\omega : X(\omega) = 0\}$.

2. Münti, mille korral vapi tõenäosus on p visati n korda. Vastav diskreetne tõenäosusruum on nüüd $\Omega = \{(a_1, \dots, a_n), a_i \in \{v, k\}\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$, $\mathbf{P}(a_1, \dots, a_n) = p^r(1-p)^{n-r}$, kus r on vektoris $(a_1, \dots, a_n)$ olev v-de arv. Vappide arv on nüüd funktsioon $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, kus $X(a_1, \dots, a_n) = r$, kui vektoris on $(a_1, \dots, a_n)$ on täpselt r komponenti võrdsed tähega v.

3. Oletame, et urnis on 20 nummerdatud kuuli. Neist võetakse tgasipanekuta kolm ning meid huvitab võetud kolmikust maksimaalne number. Vastav diskreetne tõenäosusruum on nüüd $\Omega = \{[i, j, k], 1 \leq i < j < k \leq 20\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$, $\mathbf{P}([i, j, k]) = \frac{1}{C_{20}^3}$ ning meid huvitav funktsioon on järgmine $X([i, j, k]) = k$. Sündmus $\{$ kolmest väljavõetud pallist vähemalt üks on rangelt suurem kui 16 $\}$ avaldub järgmiselt $\{\omega : X(\omega) > 16\}$. Sündmus $\{$ kolmest väljavõetud pallist ükski pole suurem kui 10 $\}$ avaldub järgmiselt $\{\omega : X(\omega) \leq 10\} = \{\omega : X(\omega) \in (-\infty, 10]\}$.

4. Münti, mille korral vapi tulemise tõenäosus on p visati esimese vapini. Vastav diskreetne tõenäosusruum on nüüd $\Omega = \{v, kv, kkv, kkkv, \dots\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$, $\mathbf{P}(\underbrace{k \cdots k}_{r} v) = (1-p)^r p$.

Visete erv esimese vapini on nüüd funktsioon $X(\underbrace{k\cdots k}_{r}v) = r+1$. Seega sündmus { münti visati rohkem kui 10 korda } on $\{\omega : X(\omega) > 10\} = \{\omega : X(\omega) \in (10, \infty)\}$.

5. Olgu $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ suvaline (mitte ilmtingimata diskreetne) tõenäosusruum, $A \subset \mathcal{F}$. Funktsioon
$$I_A : \Omega \mapsto \mathbb{R}, \quad I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{kui } \omega \in A; \\ 0, & \text{kui } \omega \notin A. \end{cases}$$
näitab kas sündmus toimub (1) või ei toimunud (0).

6. Olgu $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) = ([0,1], \mathcal{B}[0,1], \ell)$. Vaatleme funktsiooni $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, kus
   (a) $X(\omega) = \omega$;
   (b) $X(\omega) = |\omega - 0.5|$;
   (c)
$$X(\omega) = \begin{cases} \omega, & \text{kui } \omega \leq 0.5; \\ 1, & \text{kui } \omega > 0.5. \end{cases}$$

   Funktsioon (a) näitab lõigul $[0,1]$ juhuslikult valitud punkti asukohta. Sündmus { juhuslikult valitud punkt pole väiksem kui 0.2 ja suurem kui 0.3 } $= \{\omega : X(\omega) \in [0.2, 0.3]\} = [0.2, 0.3]$.
   Funktsioon (b) näitab lõigul $[0,1]$ juhuslikult valitud punkti asukoha erinevust lõigu keskpunktist. Sündmus { valitud punkt pole 0.5-st kaugemal kui 0.1} $= \{\omega : X(\omega) \leq 0.1\} = \{\omega : X(\omega) \in (-\infty, 0.1]\}$.
   Funktsioon (c) näitab lõigul $[0,1]$ juhuslikult valitud punkti asukohta juhul kui see pole suurem kui 0.5; vastasel juhul näitab lihtsalt, et punkt on kaugemal kui 0.5. Sündmus { valitud punkt on rangelt suurem 0.5-st } esitub $\{\omega : X(\omega) = 1\} = \{\omega : X(\omega) \in \{1\}\}$.

Nägime, et meid huvitavad sündmused saab enamasti esitada kujul $\{\omega : X(\omega) \in B\} =: \{X \in B\}$, kus B on mingi $\mathbb{R}$ alamhulk. Et hulk $\{X \in B\}$ oleks ikkagi sündmus (st tema tõenäosust saaks mõõta), peab kehtima: $\{X \in B\} \in \mathcal{F}$. Mõnikord see kehtib kõikide reaaltelje alamhulkade korral, teinekord mitte kõikide korral. Praktikas vajaminevad hulgad on Boreli hulgad. Siit definitsioon.

Definitsioon 2.1.1 *Funktsiooni $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ nimetatakse* **juhuslikuks suuruseks**, *kui iga Boreli hulga $B \in \mathcal{B}$ korral $\{X \in B\} \in \mathcal{F}$.*

Seega, kontrollimaks kas mingi funktsioon $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ on juhuslik suurus või mitte, tuleb iga Boreli hulga korral kontrollida kas ikka kehtib $\{X \in B\} \in \mathcal{F}$. Praktikas on see pea võimatu. Õnneks piisab kui kontrollime ülaltoodud tingimust vaid hulkade $(-\infty, x]$, $x \in \mathbb{R}$ korral.

Lemma 2.1.1 *Funktsioon $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ on juhuslik suurus parajasti siis, kui $\{\omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$ iga $x \in \mathbb{R}$ korral.*

On selge, et kui X on juhuslik suurus, siis $\{\omega : X(\omega) \leq x\} =: \{X \leq x\} \in \mathcal{F}$ iga $x \in \mathbb{R}$ korral. Teistpidise väite tõestame kursuses Tõenäosusteooria 2 (vt TNT2 järeldus 4.1).

Kas funktsioon $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ on juhuslik suurus või mitte, sõltub nii funktsioonist kui ka σ-algebrast $\mathcal{F}$. Juhul, kui $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$, on iga funktsioon X juhuslik suurus (miks?). Näiteks diskreetsel tõenäosustruumi korral on iga funktsioon juhuslik suurus. Samas, kui $\mathcal{F} = \{\Omega, \emptyset\}$, on X

juhuslik suurus parajasti siis, kui ta on konstantne, st $X \equiv c$ (miks?). Seega konkreetne funktsioon võib mõne σ-algebra korral olla juhuslik suurus, kuid mõne teise korral aga mitte. Veendu, et ülaltoodud näites on kõik funktsioonid juhuslikud suurused. Järgnevas näiteid funktsioonidest (ja σ-algebratest), mis pole juhuslikud suurused.

Näited: (elementaarsündmuste funktsioonid, mis pole juhuslikud suurused)

1. Olgu $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ tõenäosusruum, $A \subset \Omega$. Siis I_A on juhuslik suurus parajasti siis, kui $A \in \mathcal{F}$. Veendu selles.

2. Olgu $\mathcal{F} = \{\Omega, \emptyset\}$. Funktsioon $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ on juhuslik suurus parajasti siis, kui mingi c korral $X \equiv c$, st $\forall \omega$ korral $X(\omega) = c$. Veendu selles.

3. Olgu $\Omega = [0, 1]$, vaatleme funktsioone:

$$X(\omega) = \omega, \quad X(\omega) = \omega^2, \quad X(\omega) = I_{[0,0.3]}(\omega).$$

Veendu, et:

(a) need funktsioonid pole juhuslikud suurused, kui $\mathcal{F}$ koosneb järgmistest hulkadest: ülimalt loenduvad Ω alamhulgad ja hulgad, mille täiendid on ülimalt loenduvad Ω alamhulgad;

(b) need funktsioonid pole juhuslikud suurused, kui $\mathcal{F} = \{\Omega, [0, 0.5], (0.5, 1], \emptyset\}$;

(c) need funktsioonid on juhuslikud suurused, kui $\mathcal{F} = \mathcal{B}[0, 1]$.

Tihti pakuvad ka huvi juhuslike suuruste funktsioonid (näiteks X^2). Oluline on teada, et üsna üldistel eeldustel on ka need juhuslikud suurused.

Lemma 2.1.2 *Olgu $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tükiti pidev funktsioon ning X juhuslik suurus. Siis on ka $Y = g(X)$ juhuslik suurus.*

See lemma tõestatakse Tõenäosusteooria II kursuses (TNT2 lemma 4.2).

Kokkuvõtteks: Tõenäosusruumil $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ antud juhuslik suurus on funktsioon $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, mis rahuldab tingimust $\{X \in B\} \in \mathcal{F}$ iga $B \in \mathcal{B}$ korral. Selliseid funktsioone nimetatakse **mõõtuvateks**. Nii võib öelda, et juhuslik suurus on tõenäosusruumil antud mõõtuv funktsioon. Mõõtuvus tähendab, et hulgal $\{X \in B\}$ on tõenäosus $\mathbf{P}(\{X \in B\})$, mida lihtsuse mõttes tähistame $\mathbf{P}(X \in B)$. Hulgad

$$(-\infty, x], (-\infty, x), (x, \infty), [x, \infty), [a, b], (a, b), [a, b), (a, b]$$

on kõik Boreli hulgad, seega juhusliku suuruse X korral leiduvad tõenäosused

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(X \in (-\infty, x]) =: \mathbf{P}(X \leq x), \quad \mathbf{P}(X \in (-\infty, x)) =: \mathbf{P}(X < x),\\
&\mathbf{P}(X \in (x, \infty)) =: \mathbf{P}(X > x), \quad \mathbf{P}(X \in [x, \infty)) =: \mathbf{P}(X \geq x),\\
&\mathbf{P}(X \in [a, b]) =: \mathbf{P}(a \leq X \leq b), \quad \mathbf{P}(X \in (a, b)) =: \mathbf{P}(a < X < b),\\
&\mathbf{P}(X \in [a, b)) =: \mathbf{P}(a \leq X < b), \quad \mathbf{P}(X \in (a, b]) =: \mathbf{P}(a < X \leq b)\\
&\mathbf{P}(X \in [a, a]) =: \mathbf{P}(X = a).
\end{aligned}$$

2.1.2 Juhusliku suuruse jaotusfunktsioon

Definitsioon 2.1.2 *Juhusliku suuruse X* **jaotusfunktsiooniks** *nimetatakse funktsiooni*

$$F(x) = \mathbf{P}(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Näited: (juhusliku suuruse jaotusfunktsioon) Vaatleme ülaltoodud juhuslike suuruste näieid ja leiame nende jaotusfunktsioonid.

1. Juhuslik suurus X on kirjade arv kolme ausa mündi viskel. Veendu, et

$$\mathbf{P}(X = 0) = \mathbf{P}(X = 3) = \frac{1}{8}, \quad \mathbf{P}(X = 1) = \mathbf{P}(X = 2) = \frac{3}{8}.$$

   Seega jaotusfunktsioon on

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x < 0, \\ \frac{1}{8} & \text{kui } 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2} & \text{kui } 1 \leq x < 2, \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8} & \text{kui } 2 \leq x < 3, \\ 1 & \text{kui } x \geq 3. \end{cases}$$

2. Juhuslik suurus X on vappide arv. Vastavalt binoomjaotuse valemile

$$\mathbf{P}(X = r) = C_n^r p^r (1-p)^{n-r},$$

   millest jaotusfunktsioon

$$F(x) = \sum_{r=1}^{\lfloor x \rfloor} \mathbf{P}(X = r) = \sum_{r=1}^{\lfloor x \rfloor} C_n^r p^r (1-p)^{n-r}.$$

3. Juhuslik suurus X on 20-st nummerdatud pallist tagasipanekuta väljavõetud kolmiku suurim number. Veendu, et

$$\mathbf{P}(X = i) = \frac{C_{i-1}^2}{C_{20}^3}, \quad i = 3, \ldots, 20,$$

   mistõttu

$$F(x) = \frac{1}{C_{20}^3} \sum_{i=3}^{\lfloor x \rfloor} C_{i-1}^2.$$

4. Juhuslik suurus X on visete arv esimese vapini. Siin

$$\mathbf{P}(X = i) = (1-p)^{i-1} p, \quad i = 1, 2, \ldots.$$

   Jaotusfunktsioon on

$$F(x) = \sum_{i=1}^{\lfloor x \rfloor} (1-p)^{i-1} p = \frac{p}{1-p} \frac{(1-p)(1-(1-p)^{\lfloor x \rfloor})}{p} = 1 - (1-p)^{\lfloor x \rfloor}.$$

5. $X = I_A$ Siin $\mathbf{P}(X = 1) = \mathbf{P}(A)$, $\mathbf{P}(X = 0) = 1 - \mathbf{P}(A)$ ja jaotusfunktsioon on

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x < 0, \\ 1 - \mathbf{P}(A) & \text{kui } 0 \le x < 1, \\ 1 & \text{kui } x \ge 1. \end{cases}$$

6. Siin $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) = ([0,1], \mathcal{B}[0,1], \ell)$.

   (a) Juhuslik suurus $X(\omega) = \omega$. Seega iga $x \in \mathbb{R}$ korral $\mathbf{P}(X = x) = 0$. Jaotusfunktsioon

$$F(x) = \mathbf{P}(X \le x) = \mathbf{P}\{\omega : X(\omega) \le x\} = \ell([0,x] \cap [0,1]) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x < 0, \\ x, & \text{kui } 0 \le x < 1, \\ 1 & \text{kui } x \ge 1. \end{cases}$$

   (b) Juhuslik suurus $X(\omega) = |\omega - 0.5|$. Iga $x \ge 0$ korral

$$\{\omega : X(\omega) \le x\} = \{\omega : |X(\omega) - 0.5| \le x\} = ([0.5 - x, 0.5 + x] \cap [0,1]),$$

   millest jaotusfunktsioon

$$F(x) = \ell([0.5 - x, 0.5 + x] \cap [0,1]) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x < 0, \\ 2x, & \text{kui } 0 \le x < 0.5, \\ 1 & \text{kui } x \ge 0.5. \end{cases}$$

   (c) Juhuslik suurus

$$X(\omega) = \begin{cases} \omega, & \text{kui } \omega \le 0.5; \\ 1, & \text{kui } \omega > 0.5. \end{cases}$$

   Nüüd, kui $x < 1$, siis $\{X \le x\} = [0,x] \cap [0,0.5]$, kui $x \ge 1$, siis $\{X \le x\} = \Omega$, mistõttu

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x < 0, \\ x & \text{kui } 0 \le x < 0.5, \\ 0.5 & \text{kui } 0.5 \le x < 1, \\ 1 & \text{kui } x \ge 1. \end{cases}$$

Jaotusfunktsiooni omadused. Kõikidel jaotusfunktsioonidel on mitmeid ühiseid omadusi.

Lemma 2.1.3 *Olgu X juhuslik suurus ning F tema jaotusfunktsioon. Siis kehtivad järgnevad omadused.*

1. *$0 \le F(x) \le 1$ iga $x \in \mathbb{R}$ korral.*

2. *F on monotoonselt kasvav: kui $x_1 < x_2$, siis $F(x_1) \le F(x_2)$.*

3. *Kehtivad piirväärtused*

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1.$$

4. F on paremalt pidev:
$$\lim_{x \searrow a} F(x) = F(a) \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

5. Kehtib võrdus
$$\mathbf{P}(a < X \le b) = F(b) - F(a).$$

6. Kehtib võrdus
$$\mathbf{P}(X = a) = F(a) - \lim_{x \nearrow a} F(x).$$

Tõestus.

1. Ilmne (miks?)

2. Järeldub $\mathbf{P}$ monotoonsusest ja sellest, et kui $x_1 \le x_2$, siis $\{X \le x_1\} \subset \{X \le x_2\}$.

3. F monotoonsusest (omadus 2) piisab, kui näitame, et $F(n) \to 1$ ja $F(-n) \to 0$, kui $n \to \infty$ (miks?). Defineeri $A_n := \{X \le n\}$, $B_n := \{X \le -n\}$, $n = 1, 2, \ldots$. Veendu, et $\cup_n A_n = \Omega$ ja $\cap_n B_n = \emptyset$. Tõenäosuse pidevusest järelda nüüd, et
$$F(n) = \mathbf{P}(A_n) \to 1, \quad F(-n) = \mathbf{P}(B_n) \to 0.$$

4. Olgu $x_n \searrow a$ monotoonselt piirväärtuseks a koonduv jada (st $x_n \ge x_{n+1} \ge \cdots$, $x_n \to a$). Veendu, et $\cap_n \{X \le x_n\} = \{X \le a\}$. Tõenäosuse pidevus: $F(x_n) = \mathbf{P}(X \le x_n) \to \mathbf{P}(X \le a) = F(a)$.

5. Olgu $a \le b$. Kehtib $\{a < X \le b\} = \{X \le b\} - \{X \le a\}$ (miks?). Tõenäosuse 6. omadus: $\mathbf{P}(a < X \le b) = \mathbf{P}(X \le b) - \mathbf{P}(X \le a) = F(b) - F(a)$.

6. Olgu $x_n \nearrow a$ (st $x_n \le x_{n+1} \le \cdots$, $x_n \to a$). Veendu, et
$$\{X = a\} = \cap_n \{x_n < X \le a\} = \cap_n \{X_n \in (x_n, a]\}.$$
Tõenäosuse pidevus ja 5.:
$$\mathbf{P}(X = a) = \lim_n \mathbf{P}(x_n < X \le a) = \lim_n \big(F(a) - F(x_n)\big) = F(a) - \lim_n F(x_n) = F(a) - \lim_{x \nearrow a} F(x).$$

■

2.1.3 Juhuslike suuruste liigid

Diskreetsed juhuslikud suurused.

Definitsioon 2.1.3 *Juhuslikuks suurust $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ nimetatakse* **diskreetseks**, *kui X omab ülimalt loenduva arvu erinevaid väärtusi, st $X(\omega) \in \{x_i,\ i \in I\}$, kus I on ülimalt loenduv (st lõplik või loenduv hulk).*

Enamasti on diskreetse juhusliku suuruse väärtused kas täisarvud, või naturaalarvud ehk lihtsalt mõni lõplik hulk. Muidugi on diskreetne ka selline juhuslik suurus, mille väärtused on ratsionalarvud. Iga diskreetsel tõenäosusruumil defineeritud funktsioon on diskreetne juhuslik suurus (miks?)

Näited: (diskreesed juhuslikud suurused) Ülaltoodud näited 1,2,3,4,5.

Definitsioon 2.1.4 *Diskreetse juhusliku suuruse X* **jaotuseks** *nimetatakse paaride komplekti $\{(x_i, p_i)\}$, kus $\{x_i : i \in I\}$ on juhusliku suuruse X väärtuste hulk ning $p_i = P(\{\omega : X(\omega) = x_i\})$.*

Tihti esitatakse diskreetse juhusliku suuruse jaotus **jaotustabelina**, mis igale juhusliku suuruse võimalikule väärtusele x_i seab vastavusse vastava tõenäosuse p_i:

x_1	x_2	x_3	x_4	$\cdots$
p_1	p_2	p_3	p_4	$\cdots$

Näited: (jaotustabel)

1. Olgu X kirjade arv ausa mündi kolmel viskel (ülaltoodud näide 1). Jaotustabel

0	1	2	3
$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

2. Olgu X vappide arv sellise mündi n korda viskamisel, kus vapi tulemise tõenäosus on p (ülaltoodud näide 2). Jaotustabel

0	1	2	3	$\cdots$	r	$\cdots$	n
$(1-p)^n$	$np(1-p)^{n-1}$	$C_n^2 p^2(1-p)^{n-2}$	$C_n^3 p^3(1-p)^{n-3}$	$\cdots$	$C_n^r p^r(1-p)^{n-r}$	$\cdots$	p^n

3. Olgu urnis 5 valget ja 3 punast kuuli. Urnist valitakse korraga 3 kuuli, X on saadud valgete kuulide arv. Et

$$P(\{X = i\}) = \frac{C_5^i \cdot C_3^{3-i}}{C_8^3}, \ i = 0, 1, 2, 3,$$

siis jaotustabel

0	1	2	3
$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{5}{28}$

4. Olgu X on 20-st nummerdatud kuulist tagasipanekita kolme kuuli väljavõtmisel saadud suurim number (ülaltoodud näide 3). Jaotustabel

3	4	5	$\cdots$	r	$\cdots$	20
$\frac{1}{C_{20}^3}$	$\frac{3}{C_{20}^3}$	$\frac{C_4^2}{C_{20}^3}$	$\cdots$	$\frac{C_{r-1}^2}{C_{20}^3}$	$\cdots$	$\frac{C_{19}^2}{C_{20}^3}$

5. Olgu X mündi visete arv esimese vapini, vapi tulemise tõenäosus on p (ülaltoodud näide 4). Jaotustabel

1	2	3	4	$\cdots$
p	$p(1-p)$	$p(1-p)^2$	$p(1-p)^3$	$\cdots$

6. Olgu $X = I_A$, kus $A \in \mathcal{F}$. Jaotustabel

0	1
$1 - \mathbf{P}(A)$	$\mathbf{P}(A)$

Kui X on diskreetne juhuslik suurus jaotusega $\{(x_i, p_i)\}$, siis iga hulga $B \subset \mathbb{B}(\mathbb{R})$ korral

$$\mathbf{P}(X \in B) = \mathbf{P}\big(\{\omega : X(\omega) \in B\}\big) = \mathbf{P}\big(\cup_{i:x_i \in B} \{\omega : X(\omega) = x_i\}\big) = \sum_{i:x_i \in B} \mathbf{P}(X = x_i) = \sum_{i:x_i \in B} p_i. \tag{2.1}$$

Seega

$$\sum_i p_i = \mathbf{P}(X \in \mathbb{R}) = \mathbf{P}(\Omega) = 1.$$

Võttes $B = (-\infty, x]$, saame, et diskreetse juhusliku suuruse jaotusfunktsioon on kujul

$$F(x) = \mathbf{P}(X \in (-\infty, x]) = \sum_{i:x_i \leq x} p_i.$$

Seega diskreetse juhusliku suuruse jaotusfunktsioon on tükiti konstantne, omades katkevusi ainult punktides x_i, mille korral $p_i = \mathbf{P}(X = i) > 0$, kusjuures nendes punktides jaotusfunktsiooni väärtus suureneb suuruse p_i võrra. Seetõttu on jaotusfunktsioon üheselt määratud jaotusega $\{(x_i, p_i)\}$. Veendu, et ülaltoodud näidate korral see tõepoolest on nii.

Olgu $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ mingi funktsioon ja X diskreetne juhuslik suurus jaotusega $\{(x_i, p_i) : i \in I\}$. Siis funktsioon $g(X) : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ on alati diskreetne juhuslik suurus (isegi kui g pole tükati konsantne), sest $g(X)$ väärtuste hulk sisaldub X väärtuste hulgas. Juhusliku suuruse $g(X)$ väärtuste hulk on $\{g(x_i) : i \in I\}$.

Näide: (diskreetse juhusliku suuruse funktsioon). Olgu X kirjade arv ausa mündi kolmel viskel. Vaatame funktsioone $g(x) = x^2$ ja

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x < 2.5; \\ 1, & \text{kui } x \geq 2.5. \end{cases}$$

Siis $g(X)$ jaotus on

0	1	4	9
$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

ja $f(X)$ jaotus on

0	1
0.5	0.5

Pidevad juhuslikud suurused.

Definitsioon 2.1.5 *Juhuslikku suurust X nimetatakse* **pidevaks**, *kui tema jaotusfunktsioon on esitatav kujul*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)\, ds$$

mingi funktsiooni $f : \mathbb{R} \mapsto [0, \infty)$ korral. Funktsiooni f nimetatakse juhusliku suuruse X (teinekord ka jaotusfunktsiooni F) **tihedusfunktsiooniks** *(ka tiheduseks).*

Et integraal ülemise raja funktsioonina on pidev, siis pideva juhusliku suuruse jaotusfunktsioon on pidev funktsioon. Tegelikult on tal isegi tugevam omadus: F on *absoluutselt pidev*. Absoluutne pidevus tähendab, et iga ϵ korral leidub $\delta > 0$ nii, et kui $\sum_{i=1}^{k} |x_i - y_i| < \delta$ ($k = 1, 2, \ldots$), siis $\sum_{i=1}^{k} |F(x_i) - F(y_i)| < \epsilon$. Absoluutsest pidevusest järeldub pidevus (kuidas?). Saab näidata, et jaotusfunktsioonil F on tihedus parajsati siis, kui ta on absoluutselt pidev, pidevusest üksi jääb väheks: leidub pidevaid jaotusfunktsioone, millel puudub tihedus.
Seega sõna "pidevus"tähendab jaotusfunktsiooni absoluutset pidevust, mitte juhusliku suuruse kui funktsiooni pidevust.

Näited: (pidevad juhuslikud suurused) Olgu $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) = ([0,1], \mathcal{B}[0,1], \ell)$. Vaatleme funktsiooni $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, kus

1. $X(\omega) = \omega$. Teame, et X jaotusfunktsioon on

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x < 0, \\ x, & \text{kui } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{kui } x \geq 1. \end{cases}$$

   Veendu, et

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s) ds,$$

   kus

$$f(s) = \begin{cases} 1, & \text{kui } s \in [0,1]; \\ 0, & \text{mujal.} \end{cases}$$

   Seega X on pidev juhuslik suurus tihedusfunktsiooniga f. Pane tähele, et tihedusfunktsioon pole üheselt määratud; ka funktsioon

$$g(s) = \begin{cases} 1, & \text{kui } s \in (0,1); \\ 0, & \text{mujal.} \end{cases}$$

   on X tihedusfunktsion. Veendu, et funktsioonil $Y(\omega) = 1 - \omega$ on sama jaotus- ja tihedusfunktsioon.

2. $X(\omega) = |\omega - 0.5|$. Nüüd jaotusfunktsioon

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x < 0, \\ 2x, & \text{kui } 0 \leq x < 0.5, \\ 1 & \text{kui } x \geq 0.5. \end{cases}$$

   Veendu, et

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s) ds,$$

   kus

$$f(s) = \begin{cases} 2, & \text{kui } s \in [0, \frac{1}{2}]; \\ 0, & \text{mujal.} \end{cases}$$

3. $X(\omega) = 4\omega^2$. Veendu, et

$$F(x) = \mathbf{P}(X \le x) = \ell(\{\omega \in [0,1] : 4\omega^2 \le x\}) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x \le 0; \\ \frac{\sqrt{x}}{2}, & \text{kui } 0 \le x \le 4; \\ 1, & \text{kui } x \ge 4; \end{cases}$$

   Veendu, et tihedusfunktsioon on

$$f(s) = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{s}}, & \text{kui } s \in (0,4); \\ 0, & \text{mujal.} \end{cases}$$

   Veendu, et tihedusfunktsioon on ülalt tõkestamata.

4. $X(\omega) = e^{\omega}$. Veendu, et

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x \le 1; \\ \ln x, & \text{kui } 0 \le x \le e; \\ 1, & \text{kui } x \ge e; \end{cases}$$

   ning tihedusfunktsioon on

$$f(s) = \begin{cases} \frac{1}{s}, & \text{kui } s \in [1,e]; \\ 0, & \text{mujal.} \end{cases}$$

5. Olgu

$$X(\omega) = \begin{cases} 2\omega, & \text{kui } \omega \le \frac{1}{4}; \\ \sqrt{\omega}, & \omega > \frac{1}{4}. \end{cases}$$

   Leia tihedus ja jaotusfunktsioon.
   (Tihedusfunktsioon

$$f(s) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{kui } s \in [0,\frac{1}{2}]; \\ 2s & \text{kui } s \in (\frac{1}{2},1]; \\ 0, & \text{mujal.} \end{cases}$$

)

Jaotusfunktsiooni omadustest järelduvad tihedusfunktsiooni järgnevad omadused:

Lemma 2.1.4 *Olgu X pidev juhuslik suurus tihedusfunktsiooniga f. Siis kehtivad järgnevad omadused:*

1. *kehtib võrdus*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1,$$

2. *kui F on diferentseeruv punktis x ja f on pidev punktis x, siis $f(x) = F'(x)$,*

3. $\mathbf{P}(X = x) = 0$ *iga $x \in \mathbb{R}$ korral.*

4. *suvaliste reaalarvude $a \le b$ korral kehtivad võrdused*

$$\mathbf{P}(\in (a,b)) = \mathbf{P}(X \in [a,b)) = \mathbf{P}(X \in (a,b]) = \mathbf{P}(X \in [a,b]) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Tõestus.

1. $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$

2. teada kursusest mat. analüüs (integraal ülemise raja funktsioonina)

3. Jaotusfunktsiooni omadus 6.

4. Jaotusfunktsiooni omadus 5.

■

Seega pideva juhusliku suuruse iga väärtuse tõenäosus on 0.

Olgu $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ mingi funktsioon ja X pidev juhuslik suurus tihedusfunktsiooniga f. Pane tähele: $g(X)$ ei pruugi olla pidev juhuslik suurus isegi kui g on tükati pidev. Tõepoolest, kui X on näites 1 vaadeldud juhuslik suurus ja

$$g(x) = \begin{cases} -1, & \text{kui } x < 0.4; \\ 17, & \text{kui } x \geq 0.4. \end{cases}$$

siis $g(X)$ on diskreetne juhuslik suurus jaotustabeliga

-1	17
0.4	0.6

Teoreem 2.1.6 *Olgu $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ rangelt monotoone ja diferentseeruv (seega pidev) funktsioon. Siis $Y = g(X)$ on pidev juhuslik suurus tihedusfunktsiooniga*

$$f_Y(y) = \begin{cases} f\big(g^{-1}(y)\big)|\frac{d}{dy}g^{-1}(y)|, & \textit{kui } y = g(x) \textit{ mõne } x \textit{ korral;} \\ 0, & \textit{mujal.} \end{cases}$$

Tõestus. Olgu $g(\mathbb{R}) = (a, b)$, st iga $y \in (a, b)$ korral leidub $x \in \mathbb{R}$ nii, et $g(x) = y$. Oletame, et g monotoonselt kasvav. Siis $g^{-1} : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ on ka monotoonselt kasvav ja $\frac{d}{dy}g^{-1}(y) > 0$ iga $y \in (a, b)$ korral. Tuleta meelde muutuja vahetus integraalis: iga $y \in (a, b)$ korral

$$\int_a^y f(g^{-1}(z))\frac{d}{dz}g^{-1}(z)dz = \int_{-\infty}^{g^{-1}(y)} f(s)ds.$$

Tõepoolest, tähistades $s = g^{-1}(z)$, saame $ds = \frac{d}{dz}g^{-1}(z)dz$. Leiame juhusliku suuruse $Y = g(X)$ jaotusfunktsiooni. Olgu $y \in (a, b)$. Siis

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbf{P}(Y \leq y) = \mathbf{P}(g(X) \leq y) = \mathbf{P}(X \leq g^{-1}(y)) = F_X(g^{-1}(y)) \\ &= \int_{-\infty}^{g^{-1}(y)} f(s)ds = \int_a^y f(g^{-1}(z))\frac{d}{dz}g^{-1}(z)dz. \end{aligned}$$

Defineerime

$$f_Y(z) = \begin{cases} f\big(g^{-1}(z)\big)\frac{d}{dz}g^{-1}(z), & \text{kui } z \in (a, b); \\ 0, & \text{mujal.} \end{cases}$$

Nüüd: kui $y \in (a, b)$, siis

$$F_Y(y) = \int_a^y f(g^{-1}(z))\frac{d}{dz}g^{-1}(z)dz = \int_a^y f_Y(z)dz = \int_{-\infty}^y f_Y(z)dz.$$

Kui $y < a$, siis

$$F_Y(y) = \mathbf{P}(Y \leq y) = \mathbf{P}(g(X) \leq y) = 0 = \int_{-\infty}^y f_Y(z)dz.$$

Kui $y > b$, siis

$$F_Y(y) = \mathbf{P}(Y \leq y) = \mathbf{P}(g(X) \leq y) = 1 = \int_{-\infty}^b f_Y(z)dz = \int_{-\infty}^y f_Y(z)dz.$$

Seega monotoonselt kasvava g korral on teoreem tõestatud. Monotoonselt kahaneva g korral on tõestus sisuliselt sama. ■

Näide: Olgu X tihedusega f pidev juhuslik suurus, $a \neq 0$ ja b olgu konstandid. Siis $aX + b$ on pidev juhuslik suurus tihedusega

$$f_Y(y) = f\left(\frac{y-b}{a}\right)\frac{1}{|a|}.$$

Integreerimise ja diferentseerimise vahekorrast*. Analüüsist on teada järgmine tulemus: Olgu f on lõigul $[a, b]$ antud <u>pidev</u> funktsioon. Siis kehtivad seosed

1. Kui ja F on selline funktsioon, et

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(s)ds, \tag{2.2}$$

siis F on lõigul $[a, b]$ diferentseeruv ning iga $x \in [a, b]$ korral kehtib seos:

$$F'(x) = f(x). \tag{2.3}$$

2. Kui iga x korral kehtib (2.3), siis kehtib (2.2).

See tulemus kehtib ka päratute integraalide korral, millest saame (võttes $a = -\infty$ ja $F(-\infty) = 0$) seosed:

1. Kui jaotusfunktsioonil F on <u>pidev</u> tihedus, st f on pidev ja

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(s)ds, \tag{2.4}$$

siis F on igas punktis diferentseeruv ning kehtib seos: iga x korral

$$F'(x) = f(x). \tag{2.5}$$

2. Kui iga x korral kehtib (2.5) ja f on pidev, siis kehtib (2.4), st $f = F'$ on F tihedus.

Nägime, et enamasti aga tihedus pole pidev, samuti pole F igas punktis diferentseruv. Kas ja kuidas üldistuvad ülaltoodud väited?

1. Kui jaotusfunktsioonil F on tihedus, st leidub f nii, et kehtib (2.4), siis leidub punktihulk $A \subset \mathbb{R}$, mille pikkus on 0 (näiteks A koosneb lõplikust arvust punktidest) nii, et funktsioonil F on tuletis iga $x \in \overline{A}$ korral, kusjuures kehtib (2.5). Teisisõnu, võib leiduda punkte x nii, et (2.5) ei kehti, kuid neid on nii vähe, et nende hulga pikkus on 0. Enamasti on selliseid punkte ülimalt loenduv hulk. Kui tihedus f on punktis x pidev, siis sellise x korral (2.5) kehtib (sellest ei järeldu, et kui tuletis on punktis x pidev, siis ta võrdub tihedusega, sest viimane pole ju üheselt määratud).

2. Oletame nüüd, et leidub mingi funktsioon f ja punktihulk $A \subset \mathbb{R}$, mille pikkus on 0 nii, et (2.5) kehtib iga $x \in \bar{A}$ korral. Kas f on tihedus, st kas kehtib (2.4)? Vastus on eitav. Tõepoolest, diskreetse juhusliku suuruse jaotusfunktsioon on diferentseeruv igas punktis, välja arvatud juhusliku suuruse võimalikud väärtused. Võimalike väärtuste hulk on ülimalt loenduv, seega selle hulga mõõt on 0. Seega leidub fuktsioon $f(x) \equiv 0$ ja punktihulk A nii, et A pikkus on 0 ja iga $x \in \bar{A}$ korral $F'(x) = f(x) = 0$. Kindlasti ei kehti siis (2.4).
   Antud kontranäites F polnud pidev. Selgub aga, et saab konstrueerida pideva jaotusfunktsiooni F nii, et leidub mingi funktsioon f ja punktihulk $A \subset \mathbb{R}$, mille pikkus on 0 ning (2.5) kehtib iga $x \in \bar{A}$ korral, kuid f pole F tihedus (st (2.4) ei kehti).
   Selgub, et jaotushinktsioonil on tihedus (st mingi f korral kehtib (2.4)) parajasti siis, kui ta on absoluutselt pidev. Seega: juhuslik suurus X on pidev parajasti siis, kui tema jaotusfunktsioon on absoluutselt pidev.

   Funktsiooni F absoluutset pidevust on praktikas raske kontrollida. Toome kaks kriteeriumi, mille abil praktikas saab kontrollida kas jaotusfunktsioonil F on tihedus:

   (a) Kui jaotusfunktsioonil F on igas punktis tuletis, st $F'(x)$ leidub iga $x \in \mathbb{R}$ korral, siis F' on F tihedusfunktsioon. [See tuleneb asjaolust, et jaotusfunktsiooni kui monotoonse funktsiooni tuletis on alati inegreeruv (*Billingsley* Thm. 31.2), mittemonotoonsete funktsioonide tuletis ei pruugi alati integreeruv olla];

   (b) Oletame, et leidub mingi funktsioon f ja punktihulk $A \subset \mathbb{R}$, mille pikkus on 0 nii, et (2.5) kehtib iga $x \in \bar{A}$ korral. See on praktikas enamjaolt ette tulev olukord. Teame, et f üldiselt ei pruugi olla tihedus. Kui aga kehtib $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, siis f on tihedus, st (2.4). [See tuleneb Lebesgue'i dekompositsioonist (*Billingsley* Thm. 31.8)].

Juhuslikud suurused, mis pole diskreetsed ega pidevad. Vaatleme juhslikku suurust X jaotusfunktsiooniga

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x < 0, \\ x & \text{kui } 0 \leq x < 0.5, \\ 0.5 & \text{kui } 0.5 \leq x < 1, \\ 1 & \text{kui } x \geq 1. \end{cases}$$

Veendu, et X pole ei pidev ega diskreetne juhuslik suurus (miks?). Kuigi aines Tõenäosusteooria I tulevad ette eelkõige pidevad ja diskreetsed juhuslikud suurused, on väga palju selliseid juhuslikke suurusi, mis pole ei diskreetsed ega pidevad. Enamasti saab selliste juhuslike suuruste jaotusfunktsiooni F esitada kujul:

$$F(x) = \alpha F_a(x) + (1-\alpha)F_d(x), \quad \forall x,$$

kus F_a on mingi pideva juhusliku suuruse jaotusfunktsioon, F_d on mingi diskreetse juhusliku suuruse jaotusfunktsioon ning $\alpha \in (0,1)$. Ülaltoodud näites

$$F_a(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x < 0, \\ 2x & \text{kui } 0 \le x < 0.5, \\ 1 & \text{kui } x \ge 0.5. \end{cases}, \qquad F_d(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x < 1, \\ 1 & \text{kui } x \ge 1. \end{cases}$$

ning $\alpha = 0.5$. Veendu selles.

Kokkuvõtteks: Juhusliku suuruse X jaotusfunktsioon on funktsioon $F(x) = \mathbf{P}(X \le x) = \mathbf{P}(X \in (-\infty, x])$. Igal juhuslikul suurusel on jaotusfunktsioon, mis on paremalt pidev, mittekahanev ning rahuldab tingimusi $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$, $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$. Iga $a < b$ korral $\mathbf{P}(a < X \le b) = F(b) - F(a)$.
Kui juhuslikul suurusel on ülimalt loenduv arv väärtusi, on ta diskreetne. Diskreetse juhusliku suuruse jaotusfunktsioon on tükati konstante, funktsiooni katkevuspunktid on juhusliku suuruse väärtused. Katkevuspunktis x_i teeb jaotusfunktsioon "hüppe", mille pikkus on $p_i = \mathbf{P}(X = x_i)$. Diskreetse juhusliku suuruse jaotusfunktsioon on määratud paaridega (x_i, p_i), kus $\{x_i\}$ on juhusliku suuruste võimalike väärtuste hulk. Tihti esitatakse paarid (x_i, p_i) jaotustabelina. Jaotustabeli ja jaotusfunktsiooni vahel on üksühene vastavus: teades üht on võimalik rekonstrueerida teine.
Juhuslik suurus X on pidev, kui leidub mittenegatiivne funktsioon $f : \mathbb{R} \mapsto [0,\infty)$ nii, et X jaotusfunktsioon F rahuldab tingimust: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)ds$ iga x korral. Funktsiooni f nimetatakse juhusliku suuruse X (jaotusfunktsiooni F) tiheduseks. Juhuslik suurus X on pidev parajasti siis, kui tema jaotusfunktsioon F on absoluutselt pidev. Kui f on X tihedus, siis iga $a < b$ korral kehtib $\mathbf{P}(X \in [a,b]) = \mathbf{P}(a \le X \le b) = \int_a^b f(s)ds$. Pideva juhusliku suuruse korral iga väärtuse tõenäosus on 0, seega $\mathbf{P}(a \le X \le b) = \mathbf{P}(a < X \le b) = \mathbf{P}(a \le X < b) = \mathbf{P}(a < X < b)$. Tihedus f pole üheselt määratud: muutes funktsiooni f ühes punktis ei muuda me ühtegi integraali ja seega muudetud funktsioon on ka tihedus. Kui leidub pidev tihedusfunktsioon, on see ühene. Küll aga määrab tihedusfunktsioon üheselt jaotusfunktsiooni. Pideva tihedusfunktsiooni f korral kehtib $F'(x) = f(x)$ iga x korral. Üldiselt (mittepideva) tihedusfunktsiooni korral kehtib viimane seos enamike x-de korral (va pikkusega 0 hulk). Millal on jaotusfunktsioon absoluutselt pidev, st leidub tihedus? Kui jaotusfunktsioonil on iga x korral tuletis (mis ei pruugi olla pidev) on see tema tihedusfunktsioon. Kui jaotusfunktsioonil on enamike x-de korral (va pikkusega 0 hulk) tuletis, mis integreerub üheks, on see tuletis tema tihedusfunktsioon (sõltumata sellest kuidas see funktsioon on defineeritud ülejäänud punktides).
Enamike juhuslike suuruste jaotusfunktsiooni F saab esitada kujul $F = \alpha F_a + (1-\alpha)F_d$, kus F_a on mingi pideva juhusliku suuruse jaotusfunktsioon, F_d on mingi diskreetse juhusliku suuruse jaotusfunktsioon ning $\alpha \in [0,1]$. Kui $\alpha = 1$, on F pideva juhusliku suuruse jaotusfunktsioon, kui $\alpha = 0$, on F diskreetse juhusliku suuruse jaotusfunktsioon, kui $\alpha \in (0,1)$, pole vastav juhuslik suurus ei diskreetne ega pidev.

2.2 Juhusliku suuruse keskväärtus ja dispersioon

2.2.1 Keskväärtus

Kuni aksiomaatilise tõenäosusteooria loomiseni käsitleti eraldi diskreetseid ja pidevaid juhuslikke suurusi, andes nendel juhtudel erinevad definitsioonid samadele matemaatilistele mõistetele (nt keskväärtus, dispersioon jne). Osutub aga, et tegelikult on võimalik enamik definitsioone tuua ja tulemusi tõestada nii, et need kehtiksid samaaegselt igat tüüpi juhuslike suuruste korral. Nimelt saab näidata, et iga tõenäosusruumi $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ korral on võimalik defineerida nn **Lebesgue'i integraal mõõdu P suhtes**

$$\int X(\omega)\, \mathbf{P}(d\omega),$$

millel on tavalise integraaliga sarnased omadused:

- Positiivsus: kui juhuslik suurus X on mittenegatiivne, siis integraal on mittenegatiivne: kui $X(\omega) \geq 0$ iga ω korral, siis $\int X(\omega)\mathbf{P}(d\omega) \geq 0$.

- Lineaarsus: summa integraal on integraalide summa, konstantse teguri võib integraali ette tuua: kui X ja Y on juhuslikud suurused, millel eksisteerib Legesgue'i integraal ning a ja b on reaalarvud, siis

  $$\int \big(aX(\omega) + bY(\omega)\big)\mathbf{P}(d\omega) = a\int X(\omega)\, \mathbf{P}(d\omega) + b\int Y(\omega)\, \mathbf{P}(d\omega).$$

  Siit järeldub (kuidas?) järgmine omadus: kui $X_1, \ldots, X_n$ on lõplik arv juhuslikke suurusi, millel leidub Lebesgue'i integraal. Siin suvaliste reaalarvude $a_1, \ldots, a_n$ korral on ka juhuslikul suurusel $a_1X_1 + \cdots a_nX_n$ Lebesgue'i integraal, kusjuures

  $$\int \big(a_1X_1(\omega) + \cdots + X_n(\omega)\big)\mathbf{P}(d\omega) = a_1\int X_1(\omega)\mathbf{P}(d\omega) + \cdots + a_n\int X_n(\omega)\mathbf{P}(d\omega). \quad (2.6)$$

- Kooskõla "pindala" arvutamise omadusega. Olgu juhuslikul suurusel X on ainult lõplik arv väärtusi $\{x_1, \ldots, x_N\}$. Sellise juhusliku suuruse saab alati esitada kujul

  $$X = \sum_{i=1}^{N} x_i \cdot I_{A_i}, \quad \text{kus} \quad A_i = \{\omega : X(\omega) = x_i\}$$

  Sellise juhusliku suuruse Lebesgue'i integraal on

  $$\int X(\omega)\, \mathbf{P}(d\omega) = \sum_{i=1}^{N} x_i \cdot \mathbf{P}(A_i) = \sum_{i=1}^{N} x_i \cdot \mathbf{P}(X = x_i). \quad (2.7)$$

  Toodud valem üldistub järgmiselt. Olgu juhuslikul suurusel X on loenduv arv väärtusi $x_1, x_2, \ldots$ Sellise juhusliku suuruse saab alati esitada kujul

  $$X = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot I_{A_i}, \quad \text{kus} \quad A_i = \{\omega : X(\omega) = x_i\}$$

Kui

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|\mathbf{P}(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|\mathbf{P}(X = x_i) < \infty,$$

on funktsioonil X Lebesgue'i integraal olemas ja see avaldub

$$\int X(\omega)\, dP(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \mathbf{P}(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \mathbf{P}(X = x_i). \tag{2.8}$$

- Kooskõla Riemanni integraaliga: kui $\Omega = [a,b]$ (või $(a,b), [a,b), (a,b]$), $\mathcal{F} = \mathcal{B}[a,b]$ (või $\mathcal{B}(a,b), \mathcal{B}[a,b), \mathcal{B}(a,b]$), $\mathbf{P} = \ell$ ning juhuslik suurus X on Riemanni mõttes integreeruv, siis

$$\int X(\omega)\, \mathbf{P}(d\omega) = \int_a^b X(\omega) d\omega. \tag{2.9}$$

Näited: (Lebesgue'i integraal) Vaatleme meile juba tuttavaid näiteid juhuslikest suurusetst.

1. Ausat münti visatakse kolm korda. Vastav diskreetne tõenäosusruum on järgmine $\Omega = \{kkk, vkk, kvk, kkv, kvv, vkv, vvk, vvv\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$, $\mathbf{P}(w_i) = \frac{1}{8}$ iga i korral. Oletame, et meid huvitab kirjade arv. Kirjade arv, tähistame selle X, on järgmine funktsioon

$$X : \Omega \mapsto \mathbb{R}, \quad X(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{kui } \omega = vvv; \\ 1, & \text{kui } \omega \in \{kvv, vkv, vvk\}; \\ 2, & \text{kui } \omega \in \{kkv, vkk, kvk\}; \\ 3, & \text{kui } \omega = kkk. \end{cases}$$

Juhusliku suuruse X võime esitada kujul

$$X = 0 \cdot I_{\{vvv\}} + 1 \cdot I_{\{kvv,vkv,vvk\}} + 2 \cdot I_{\{kkv,vkk,kvk\}} + 3 \cdot I_{\{kkk\}}.$$

Vastavalt valemile (2.7) saame

$$\begin{aligned}\int X(\omega)\mathbf{P}(d\omega) &= 0 \cdot \mathbf{P}(\{vvv\}) + 1 \cdot \mathbf{P}(\{kvv, vkv, vvk\}) + 2 \cdot \mathbf{P}(\{kkv, vkk, kvk\}) + 3 \cdot \mathbf{P}(\{kkk\}) \\ &= \frac{3}{8} + \frac{6}{8} + \frac{3}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

2. Münti, mille korral vapi tulemise tõenäosus on p visati esimese vapini. Vastav diskreetne tõenäosusruum on nüüd $\Omega = \{v, kv, kkv, kkkv, \ldots\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$, $\mathbf{P}(\underbrace{k \cdots k}_{r} v) = (1-p)^r p$.

   Visete arv esimese vapini on nüüd funktsioon $X(\underbrace{k \cdots k}_{r} v) = r + 1$, mille võib esitada kujul

$$X = 1 \cdot I_{\{v\}} + 2 \cdot I_{\{kv\}} + 3 \cdot I_{\{kkv\}} + 4 \cdot I_{\{kkkv\}} + \cdots$$

   Vastavalt valemile (2.8), saame X Lebesgue'i integraali

$$\int X(\omega)\mathbf{P}(d\omega) = 1{\cdot}\mathbf{P}(\{v\}) + 2{\cdot}\mathbf{P}(\{kv\}) + 3{\cdot}\mathbf{P}(\{kkv\}) + 4{\cdot}\mathbf{P}(\{kkkv\}) + \cdots = \sum_{r=1}^{\infty} r(1-p)^{r-1} p = \frac{1}{p}.$$

3. Olgu $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ suvaline (mitte ilmtingimata diskreetne) tõenäosusruum, $A \in \mathcal{F}$. Vaatleme juhusliku suurust $X = I_A$, mille võime kirjutada
$$X = 1 \cdot I_A + 0 \cdot I_{\bar{A}}.$$
Vastavalt valemile (2.7) saame
$$\int X(\omega)\mathbf{P}(d\omega) = \mathbf{P}(A).$$

4. Olgu $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) = ([0,1], \mathcal{B}[0,1], \ell)$. Vaatleme funktsiooni $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, kus
   (a) $X(\omega) = \omega$;
   (b) $X(\omega) = |\omega - 0.5|$;
   (c)
$$X(\omega) = \begin{cases} \omega, & \text{kui } \omega \leq 0.5; \\ 1, & \text{kui } \omega > 0.5. \end{cases}$$
   Funktsioon (a) on lõigul $[0,1]$ Riemanni mõttes intgreeruv, seega (2.9)
$$\int X(\omega)\mathbf{P}(d\omega) = \int_0^1 X(\omega)d\omega = \int_0^1 \omega d\omega = \frac{1}{2}.$$
   Funktsioon (b) on lõigul $[0,1]$ Riemanni mõttes intgreeruv, seega
$$\int X(\omega)\mathbf{P}(d\omega) = \int_0^1 |\omega - 0.5| d\omega = \int_0^{0.5} (0.5-\omega)d\omega + \int_{0.5}^1 (\omega - 0.5)d\omega = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{4}.$$
   Ka funktsioon (c) on Riemanni mõttes intgreeruv, mistõttu
$$\int X(\omega)\mathbf{P}(d\omega) = \int_0^1 X(\omega)d\omega = \int_0^{0.5} \omega d\omega + \int_{0.5}^1 d\omega = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{5}{8}.$$

Definitsioon 2.2.1 *kui juhuslikul suurusel X on on Lebesgue'i integraal mõõdu $\mathbf{P}$ suhtes (st X on Lebesgue'i mõttes integreeruv), siis selle juhusliku suuruse keskväärtus on arv*
$$EX = \int X(\omega)\, \mathbf{P}(d\omega).$$

Selle integraali täpne defineerimine ja integreeruvuse tingimuste lahtiseletamine toimub kursuses Tõenäosusteooria II.

Seega keskväärtusel on kõik Lebesgue'i integraali omadused. Sõnastame need teoreemina.

Teoreem 2.2.2 *(Keskväärtuse omadused) Alljärgnevas oletame, et kõikidel juhuslikel suurustel leiduvad lõplikud keskväärtused.*

1. *Kui juhuslik suurus X on mittenegatiivne, siis tema keskväärtus on samuti mittenegatiivne: kui $\mathbf{P}(X \geq 0) = 1$ (näiteks $X(\omega) \geq 0$ iga ω korral), siis $EX \geq 0$.*

2. *Keskväärtus on monotoone. Kui X ja Y on lõplike keskväärtustega juhuslikud suurused ja $\mathbf{P}(X \le Y) = 1$, (näiteks $X(\omega) \le Y(\omega)$ iga ω korral), siis $EX \le EY$.*

3. *Kekkväärtus on lineaarne. Kui X ja Y on keskväärtust omavad juhuslikud suurused ning a ja b on suvalised reaalarvud, siis*

$$E(aX + bY) = aEX + bEY.$$

Üldisemalt, kui X_i, $i = 1, \dots, n$ on keskväärtust omavad juhuslikud suurused ning a_i, $i = 1, \dots, n$ on suvalised reaalarvud, siis

$$E(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \, EX_i. \tag{2.10}$$

4. *Kui mingi reaalarvu c korral kehtib $\mathbf{P}(X = c) = 1$, siis $EX = c$.*

5. *Kui $\mathbf{P}(X \ge 0) = 1$, siis $EX = 0$ parajasti siis, kui $\mathbf{P}(X = 0) = 1$.*

6. *Juhusliku suuruse keskväärtus on tema väikseima ja suurima väärtuse vahel:*

$$\inf_{\omega \in \Omega} X(\omega) \le EX \le \sup_{\omega \in \Omega} X(\omega)$$

7. *Keskväärtuse absoluutväärtus on ei ole suurem absoluutväärtuse keskväärtusest*

$$|EX| \le E|X|.$$

Enamasti juhuslik suurus kui funktsioon pole meile teada, küll aga on teada juhusliku suuruse jaotusfunktsioon (näiteks jaotustabel või tihedusfunktsioon). Selgub, et sellest piisab keskväärtuse arvutamiseks: juhusliku suuruse keskväärtus sõltub ainilt tema jaotusfunktsioonist . Seega, kui kahel juhuslikul suurusel on üks ja seesama jaotusfunktsioon (näiteks sama jaotustabel või sama tihedus), on neil ka sama keskväärtus. Veendume selles diskreetse juhusliku suuruse näitel. Olgu X diskreetne juhuslik suurus jaotusega $\{(x_i, p_i)\}_{i=1}^{N}$, kus $N \le \infty$. Oletame, et

$$\sum_{i=1}^{N} |x_i| p_i < \infty. \tag{2.11}$$

(See on alati nii, kui N on lõplik). Et $p_i = \mathbf{P}(X = i)$, saame valemitest (2.7) ja (2.8):

$$EX = \sum_{i=1}^{N} x_i \mathbf{P}(X = x_i) = \sum_{i=1}^{N} x_i p_i. \tag{2.12}$$

Näited: (diskreetse juhusliku suuruse keskväärtus)

1. Olgu $X = I_A$, kus $A \in \mathcal{F}$. Jaotustabel

0	1
$1 - \mathbf{P}(A)$	$\mathbf{P}(A)$

Keskväärtus $EX = \mathbf{P}(A)$.

2. Olgu X kirjade arv ausa mündi kolmel viskel. Jaotustabel

0	1	2	3
$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Keskväärtus: $EX = \sum_{i=1}^{4} x_i p_i = \frac{3}{8} + \frac{6}{8} + \frac{3}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$.

3. Olgu X vappide arv sellise mündi n korda viskamisel, kus vapi tulemise tõenäosus on p (ülaltoodud näide 2). Jaotustabel

0	1	2	3	$\cdots$	r	$\cdots$	n
$(1-p)^n$	$np(1-p)^{n-1}$	$C_n^2 p^2 (1-p)^{n-2}$	$C_n^3 p^3 (1-p)^{n-3}$	$\cdots$	$C_n^r p^r (1-p)^{n-r}$	$\cdots$	p^n

Keskväärtus

$$EX = \sum_{r=1}^{n} r C_n^r p^r (1-p)^{n-r}.$$

Selle keskväärtuse arvutamiseks on lihtne arutleda järgmiselt. Olgu Y_i järgmine juhuslik suurus:

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{kui } i\text{-ndal viskel tuli vapp;} \\ 0, & \text{kui } i\text{-ndal viskel tuli vapp;} \end{cases}$$

Juhusliku suuruse Y_i jaotustabel on

0	1
$1-p$	p

Seega $EY_i = p$. Pane tähele, et $X = Y_1 + \cdots + Y_n$. Vastavalt seosele (2.10) saame

$$EX = E(Y_1 + \cdots + Y_n) = EY_1 + \cdots + EY_n = np.$$

4. Olgu urnis 5 valget ja 3 punast kuuli. Urnist valitakse korraga 3 kuuli, X on saadud valgete kuulide arv. Et

$$\mathbf{P}(X = i) = \frac{C_5^i \cdot C_3^{3-i}}{C_8^3}, \ i = 0, 1, 2, 3,$$

siis jaotustabel

0	1	2	3
$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{30}{56}$	$\frac{10}{56}$

Keskväärtus $EX = \frac{15}{56} + 2\frac{15}{28} + 3\frac{5}{28} = \frac{105}{56}$.

5. Olgu X on 20-st nummerdatud kuulist tagasipanekita kolme kuuli väljavõtmisel saadud suurim number (ülaltoodud näide 3). Jaotustabel

3	4	5	$\cdots$	r	$\cdots$	20
$\frac{1}{C_{20}^3}$	$\frac{3}{C_{20}^3}$	$\frac{C_4^2}{C_{20}^3}$	$\cdots$	$\frac{C_{r-1}^2}{C_{20}^3}$	$\cdots$	$\frac{C_{19}^2}{C_{20}^3}$

Keskväärtus

$$EX = \sum_{r=3}^{20} r \frac{C_{r-1}^2}{C_{20}^3}.$$

6. Olgu X mündi visete arv esimese vapini, vapi tulemise tõenäosus on p (ülaltoodud näide 4). Jaotustabel

1	2	3	4	$\cdots$
p	$p(1-p)$	$p(1-p)^2$	$p(1-p)^3$	$\cdots$

Keskväärtus:

$$EX = \sum_{i=1}^{\infty} i(1-p)^{i-1}p = -p\Big(\sum_{i=1}^{\infty}(1-p)^i\Big)' = -p\Big(\frac{1-p}{p}\Big)' = \frac{1}{p}.$$

Pidevate juhuslike suuruste keskväärtust saab leida läbi tiheduse järgmiselt: kui X on pidev juhuslik suurus tihedusega f ja $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)\, dx < \infty$, siis juhuslikul suurusel X on lõplik keskväärtus:

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx. \tag{2.13}$$

Näited: (pideva juhusliku suuruse keskväärtus) Olgu $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) = ([0,1], \mathcal{B}[0,1], \ell)$. Vaatleme funktsiooni $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$.

1. $X(\omega) = \omega$. Teame, et X tihedusfunktsioon

$$f(s) = \begin{cases} 1, & \text{kui } s \in [0,1]; \\ 0, & \text{mujal.} \end{cases}$$

Eespool leidsime Lebesgue' integraali definitsiooni kasutades selle juhusliku suuruse keskväärtuse $EX = 0.5$. Vastavalt valemile (2.13) saab keskväärtust leida ka nii

$$EX = \int_0^1 x f(x) dx = \int_0^1 x dx = 0.5.$$

2. $X(\omega) = |\omega - 0.5|$. Tihedusfunktsioon

$$f(s) = \begin{cases} 2, & \text{kui } s \in [0, \frac{1}{2}]; \\ 0, & \text{mujal.} \end{cases}$$

Eespool leidsime Lebesgue' integraali definitsiooni kasutades $EX = 0.25$. Vastavalt valemile (2.13) saab keskväärtust leida ka nii

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^{0.5} 2x dx = 0.25.$$

3. $X(\omega) = 4\omega^2$. Tihedusfunktsioon on

$$f(s) = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{s}}, & \text{kui } s \in (0,4); \\ 0, & \text{mujal.} \end{cases}$$

Kasutades Lebesgue'i integraali definitsiooni saame

$$EX = \int X(\omega)\mathbf{P}(d\omega) = \int_0^1 (4\omega^2)d\omega = \frac{4}{3}.$$

Kasutades seost (2.13) saame

$$EX = \int_0^4 \frac{1}{4\sqrt{s}} s ds = \frac{1}{4}\int_0^4 \sqrt{s} ds = \frac{4}{3}.$$

4. $X(\omega) = e^\omega$. Tihedusfunktsioon on

$$f(s) = \begin{cases} \frac{1}{s}, & \text{kui } s \in [1,e]; \\ 0, & \text{mujal.} \end{cases}$$

Kasutades Lebesgue'i integraali definitsiooni saame

$$EX = \int X(\omega)\mathbf{P}(d\omega) = \int_0^1 e^\omega d\omega = e - 1.$$

Kasutades seost (2.13) saame

$$EX = \int_1^e \frac{1}{s} s ds = \int_1^e ds = e - 1.$$

5. Olgu

$$X(\omega) = \begin{cases} 2\omega, & \text{kui } \omega \le \frac{1}{4}; \\ \sqrt{\omega}, & \omega > \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Tihedusfunktsioon

$$f(s) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{kui } s \in [0, \frac{1}{2}]; \\ 2s & \text{kui } s \in (\frac{1}{2}, 1]; \\ 0, & \text{mujal.} \end{cases}$$

Leia EX nii Lebesgue'i integraali definitsiooni kui ka seost (2.13)kasutades ja veendu, et $EX = \frac{1}{16} + \frac{7}{12}$.

Kuidas leida sellise juhusliku suuruse keskväärtust, mis pole ei pidev ega diskreetne? Oletame, et X jaotusfunktsioon F avaldub $F = \alpha F_a + (1-\alpha)F_d$, kus F_a on mingi absoluutselt pidev jaotusfunktsioon st mingi pideva juhusliku suuruse, olgu see Z_a, jaotusfunktsioon; F_d on mingi diskreetse juhusliku suuruse, olgu see Z_d, jaotusfunktsioon ja $\alpha \in [0,1]$. Kui nendel juhuslikel suurustel Z_a ja Z_d on lõplikud keskväärtused, siis on ka juhuslikul suurusel X lõplik keskväärtus, mis avaldub:

$$EX = \alpha E Z_a + (1-\alpha)E Z_d. \tag{2.14}$$

Teisisõnu, kui f on F_a tihedus ning $\{x_i, p_i\}$ on F_d katkevuspunktid ning neile vastavad tõenäosused, (st Z_d jaotus), siis

$$EX = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx + (1-\alpha)\sum_i x_i p_i.$$

Näide: Olgu

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x < 0, \\ x & \text{kui } 0 \leq x < 0.5, \\ 0.5 & \text{kui } 0.5 \leq x < 1, \\ 1 & \text{kui } x \geq 1. \end{cases}$$

Sellise jaotusega juhuslik suurus pole ei pidev ega diskreetne. Teame, et sellise jaotusega juhusliku suuruse keskväärtus on $\frac{5}{8}$. Samuti teame, et iga x korral

$$F(x) = \frac{1}{2}F_a(x) + \frac{1}{2}F_d(x),$$

kus

$$F_a(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x < 0, \\ 2x & \text{kui } 0 \leq x < 0.5, \\ 1 & \text{kui } x \geq 0.5. \end{cases}, \qquad F_d(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x < 1, \\ 1 & \text{kui } x \geq 1. \end{cases}$$

Jaotuse F_a tihedus on

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{kui } x \in [0, \frac{1}{2}]; \\ 0, & \text{mujal.} \end{cases}$$

Sellise jaotusfunktsiooniga juhusliku suuruse keskväärtus on

$$\int_0^{\frac{1}{2}} 2x dx = \frac{1}{4}.$$

Jaotusfunktsioonile F_d vastav juhuslik suurus Z_d on järgmine $\mathbf{P}(Z_d = 1) = 1$. Selle keskväärtus on 1. Seega $EX = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$.

Lõpuks veel üks kasulik valem keskväärtuse arvutamiseks.

Lemma 2.2.1 *Olgu X lõpliku keskväärtusega ja jaotusfunktsiooniga F juhuslik suurus. Siis*

$$EX = \int_0^{\infty}(1 - F(t))dt - \int_{-\infty}^{0} F(t)dt. \tag{2.15}$$

Tõestus. Diskreetse juhusliku suuruse korral on ülaltoodud valemit kerge tõestada, üldise juhusliku suuruse korral tõestame selle kursuses Tõenäosusteooria 2 (TNT2, Lemma 8.1) ■

Näited: (valem (2.15))

1. Olgu juhusliku suuruse X jaotusfunktsioon

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x < 0, \\ x, & \text{kui } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{kui } x \geq 1. \end{cases}$$

Teame, et $EX = \frac{1}{2}$. Valem (2.15):

$$EX = \int_0^\infty (1 - F(x))dx = \int_0^1 (1-x)dx = \frac{1}{2}.$$

2. Olgu juhusliku suuruse X jaotusfunktsioon

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x < 0, \\ 2x, & \text{kui } 0 \leq x < 0.5, \\ 1 & \text{kui } x \geq 0.5. \end{cases}$$

Teame, et $EX = \frac{1}{4}$. Valem (2.15):

$$EX = \int_0^\infty (1 - F(x))dx = \int_0^{0.5} (1-2x)dx = \frac{1}{4}.$$

3. Olgu juhusliku suuruse X jaotusfunktsioon

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x \leq 0; \\ \frac{\sqrt{x}}{2}, & \text{kui } 0 \leq x \leq 4; \\ 1, & \text{kui } x \geq 4; \end{cases}$$

Teame, et $EX = \frac{4}{3}$. Valem (2.15):

$$EX = \int_0^\infty (1 - F(x))dx = \int_0^4 (1 - \frac{\sqrt{x}}{2})dx = [x - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3}]_0^4 = \frac{4}{3}.$$

4. Olgu juhusliku suuruse X jaotusfunktsioon

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x \leq 1; \\ \ln x, & \text{kui } 1 \leq x \leq e; \\ 1, & \text{kui } x \geq e; \end{cases}$$

Teame, et $EX = e - 1$. Valem (2.15):

$$EX = \int_0^\infty (1 - F(x))dx = \int_0^1 1dx + \int_1^e [1 - \ln x]dx = 1 + [x - x\ln x + x]_1^e = e - 1.$$

5. Olgu X tihedusfunktsioon

$$f(s) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{kui } s \in [0, \frac{1}{2}]; \\ 2s & \text{kui } s \in (\frac{1}{2}, 1]; \\ 0, & \text{mujal.} \end{cases}$$

Leia jaotusfunktsioon ning arvuta valemi (2.15) abil keskväärtus. Veendu, et see on $\frac{1}{16} + \frac{7}{12} = \frac{31}{48}$.

6. Olgu X jaotusfunktsioon

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x < 0, \\ x & \text{kui } 0 \leq x < 0.5, \\ 0.5 & \text{kui } 0.5 \leq x < 1, \\ 1 & \text{kui } x \geq 1. \end{cases}$$

Teame, et $EX = \frac{5}{8}$. Valem (2.15):

$$EX = \int_0^\infty (1 - F(x))dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 0.5dx = \frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5}{8}.$$

Juhusliku suuruse funktsiooni keskväärtus. Olgu X juhuslik suurus ning $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ selline funktsioon, et $g(X)$ on ka juhuslik suurus. Teame, et kui X on diskreetne juhuslik suurus, siis on seda ka $g(X)$. Üldiselt piisab, kui g on tükati pidev. Kuidas leida $g(X)$ keskväärtust?

Kui on teada tõenäosusruum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ning $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, siis $g(X) : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ on juhuslik suurus, ning $Eg(X)$ (juhul kui see on olems) leidmiseks saab kasutada definitsiooni:

$$Eg(X) = \int g(X(\omega))\mathbf{P}(d\omega). \tag{2.16}$$

Pane tähele, et kui g on samasusfunktsioon, st $g(x) = x$, saame keskväärtuse definitsiooni.

Näited: (seos (2.16))

1. Ausat münti visatakse kolm korda. Vastav diskreetne tõenäosusruum on järgmine $\Omega = \{kkk, vkk, kvk, kkv, kvv, vkv, vvk, vvv\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$, $\mathbf{P}(w_i) = \frac{1}{8}$ Olgu

$$X : \Omega \mapsto \mathbb{R}, \quad X(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{kui } \omega = vvv; \\ 1, & \text{kui } \omega \in \{kvv, vkv, vvk\}; \\ 2, & \text{kui } \omega \in \{kkv, vkk, kvk\}; \\ 3, & \text{kui } \omega = kkk. \end{cases},$$

mille võime esitada kujul

$$X = 0 \cdot I_{\{vvv\}} + 1 \cdot I_{\{kvv,vkv,vvk\}} + 2 \cdot I_{\{kkv,vkk,kvk\}} + 3 \cdot I_{\{kkk\}}.$$

Vaatleme suvalist funktsiooni $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. juhuslik suurus $g(X)$ on seega järgmine

$$g\big(X(\omega)\big) = \begin{cases} g(0), & \text{kui } \omega = vvv; \\ g(1), & \text{kui } \omega \in \{kvv, vkv, vvk\}; \\ g(2), & \text{kui } \omega \in \{kkv, vkk, kvk\}; \\ g(3), & \text{kui } \omega = kkk. \end{cases},$$

mille võime esitada kujul

$$g(X) = g(0) \cdot I_{\{vvv\}} + g(1) \cdot I_{\{kvv,vkv,vvk\}} + g(2) \cdot I_{\{kkv,vkk,kvk\}} + g(3) \cdot I_{\{kkk\}}.$$

Pane tähele, et ülaltoodud esitused kehtivad ka siis, kui $g(i) = g(j)$ mõne $i \neq j$ korral. Vastavalt Lebesgue'i integraali arvutamise eeskirjale (valemid (2.7) ja (2.8)) saame

$$\int g\big(X(\omega)\big)\mathbf{P}(d\omega) = g(0)\mathbf{P}(\{vvv\}) + g(1)\mathbf{P}(\{kvv, vkv, vvk\}) + g(2)\mathbf{P}(\{kkv, vkk, kvk\}) + g(3)\mathbf{P}(\{kkk\})$$
$$= \frac{g(0) + 3g(1) + 3g(2) + g(3)}{8}.$$

Näiteks, kui $g(x) = x^2$, saame

$$EX^2 = \frac{3 + 12 + 9}{8} = 3.$$

Kui

$$g(x) = \begin{cases} 2, & \text{kui } x \text{ paarisarv;} \\ 1, & \text{kui } x \text{ paaritu.} \end{cases}$$

siis

$$g(X) = 2\cdot I_{\{vvv,kkv,vkk,kvk\}} + I_{\{kvv,vkv,vvk,kkk\}} = 2\cdot I_{\{vvv\}} + I_{\{kvv,vkv,vvk\}} + 2\cdot I_{\{kkv,vkk,kvk\}} + I_{\{kkk\}}$$

ning

$$Eg(X) = 2\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{2} = 2\cdot\frac{1}{8} + \frac{3}{8} + 2\cdot\frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{2}.$$

2. Münti, mille korral vapi tulemise tõenäosus on p visati esimese vapini. Vastav diskreetne tõenäosusruum on nüüd $\Omega = \{v, kv, kkv, kkkv, \ldots\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$, $\mathbf{P}(\underbrace{k\cdots k}_{r}v) = (1-p)^r p$.

   Visete arv esimese vapini on nüüd funktsioon $X(\underbrace{k\cdots k}_{r}v) = r + 1$, mille võib esitada kujul

$$X = 1\cdot I_{\{v\}} + 2\cdot I_{\{kv\}} + 3\cdot I_{\{kkv\}} + 4\cdot I_{\{kkkv\}} + \cdots$$

   Nüüd

$$Eg(X) = g(1)\cdot\mathbf{P}(\{v\}) + g(2)\cdot\mathbf{P}(\{kv\}) + g(3)\cdot\mathbf{P}(\{kkv\}) + g(4)\cdot\mathbf{P}(\{kkkv\}) + \cdots.$$

   Näiteks, kui $g(x) = x^2$, saame

$$\begin{aligned}
EX^2 &= \sum_{r=1}^{\infty} r^2(1-p)^{r-1}p = \sum_{r=1}^{\infty}(r-1+1)^2(1-p)^{r-1}p \\
&= \sum_{r=1}^{\infty}(r-1)^2(1-p)^{r-1}p + 2\sum_{r=1}^{\infty}(r-1)(1-p)^{r-1}p + \sum_{r=1}^{\infty}(1-p)^{r-1}p \\
&= \sum_{s=0}^{\infty} s^2(1-p)^s p + 2\sum_{s=0}^{\infty} s(1-p)^s p + 1 \\
&= (1-p)\sum_{s=1}^{\infty} s^2(1-p)^{s-1}p + 2(1-p)\sum_{s=1}^{\infty} s(1-p)^{s-1}p + 1 \\
&= (1-p)EX^2 + 2(1-p)EX + 1 = (1-p)EX^2 + 2\frac{(1-p)}{p} + 1.
\end{aligned}$$

   Lahendades selle võrrandi, saame

$$EX^2 = \frac{2-p}{p^2}.$$

3. Olgu $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ suvaline tõenäosusruum ning X diskreetne juhuslik suurus. Siis

$$X = \sum_{i=1}^{N} x_i \cdot I_{A_i}, \quad \text{kus} \quad A_i = \{\omega : X(\omega) = x_i\}, \quad N \leq \infty$$

ning $g(X)$ avaldub

$$g(X) = \sum_{i=1}^{N} g(x_i) \cdot I_{A_i} \quad \text{kus} \quad A_i = \{\omega : X(\omega) = x_i\}.$$

Kui

$$\sum_{i=1}^{N} |g(x_i)| \mathbf{P}(X = x_i) < \infty,$$

on juhuslikul suurusel $g(X)$ keskväärtus, mis Lebesgue'i integraali arvutamise valemi

$$Eg(X) = \sum_{i=1}^{N} g(x_i) \mathbf{P}(X = x_i). \tag{2.17}$$

4. Olgu $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) = ([0,1], \mathcal{B}[0,1], \ell)$. Vaatleme funktsiooni $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, kus

   (a) $X(\omega) = \omega$. Siis $g(X) = g(\omega)$ ning kui g on Riemanni mõttes integreeruv, siis

   $$Eg(X) = \int_0^1 g(\omega) d\omega.$$

   Näiteks, kui $g(x) = x^2$, siis

   $$Eg(X) = \int_0^1 \omega^2 d\omega = \frac{\omega^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

   (b) $X(\omega) = |\omega - 0.5|$. Kui g on selline, et $g\big(|\omega - 0.5|\big)$ on Riemanni mõttes integreeruv, siis

   $$Eg(X) = \int_0^1 g\big(|\omega - 0.5|\big) d\omega.$$

   Kui g on ruutfunktsioon, siis

   $$EX^2 = \int_0^1 \big(\omega - 0.5\big)^2 d\omega = \frac{1}{3}.$$

   (c)

   $$X(\omega) = \begin{cases} \omega, & \text{kui } \omega \leq 0.5; \\ 1, & \text{kui } \omega > 0.5. \end{cases}$$

   Kui $g(X)$ on Riemanni mõttes integreeruv, siis

   $$Eg(X) = \int_0^1 g(X(\omega)) d\omega = \int_0^{0.5} g(\omega) d\omega + \int_{0.5}^1 g(1) d\omega.$$

   Ruutfunktsiooni korral

   $$EX^2 = \int_0^{0.5} \omega^2 d\omega + \frac{1}{2} = \frac{\omega^3}{3}\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{24} + \frac{1}{2}.$$

Valemist (2.17) saame järgmise väite.

Väide 2.2.1 *Olgu X diskreetne juhuslik jaotusega $\{x_i, p_i\}_{i=1}^N$, $N \le \infty$.*

$$\sum_{i=1}^{N} |g(x_i)|p_i < \infty, \tag{2.18}$$

siis juhuslikul suurusel $g(X)$ on lõplik keskväärtus, mis avaldub valemiga

$$Eg(X) = \sum_{i=1}^{N} g(x_i)p_i. \tag{2.19}$$

Tõestus. Valem (2.19) järeldub valemist (2.17). Valemi (2.19) formaalne tõestus antakse kursuses Tõenäosusteooria 2 (TNT2 8.2.2). ■

Pane tähele, et (2.18) on $E|g(X)| < \infty$.

Järeldus 2.2.1 *Olgu X diskreetne juhuslik suurus jaotusega $\{(x_i, p_i)\}_{i=1}^N$, kus $N \le \infty$. Kui kehtib (2.11), on juhuslikul suurusel X lõplik keskväärtus, mis avaldub valemiga (2.12).*

Tõestus. Järeldub väitest 2.2.1, kui võtame $g(x) = x$. ■

Teades pideva juhusliku suuruse X tihedusfunktsiooni, saame funktsiooni $g(X)$ keskväärtuse leida järgmiselt.

Väide 2.2.2 *Olgu X pidev juhuslik suurus tihedusega f. Olgu $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ selline funktsioon, et $g(X)$ on juhuslik suurus. Kui $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|f(x)\,dx < \infty$, siis juhuslikul suurusel $g(X)$ on lõplik keskväärtus:*

$$Eg(X) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,f(x)\,dx. \tag{2.20}$$

Tõestus. Tõestame hiljem (Lemma **??**). ■

Pane tähele, et kui $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|f(x)\,dx = E|g(X)|$.

Järeldus 2.2.2 *Olgu X pidev juhuslik suurus tihedusega f. Kui $\int_{-\infty}^{\infty} |x|f(x)\,dx < \infty$, siis juhuslikul suurusel X on lõplik keskväärtus: $EX = \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)$.*

Tõestus. Järeldub väitest 2.2.2, kui võtame $g(x) = x$. ■

Näited: (pideva juhusliku suuruse funktsiooni keskväärtus) Olgu $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) = ([0,1], \mathcal{B}[0,1], \ell)$. Vaatleme funktsiooni $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ ja eeldame, et $g(X)$ on juhuslik suurus.

1. $X(\omega) = \omega$. Teame, et X tihedusfunktsioon

$$f(s) = \begin{cases} 1, & \text{kui } s \in [0,1]; \\ 0, & \text{mujal.} \end{cases}$$

   Teame, et $Eg(X) = \int_0^1 g(\omega)d\omega$. Teisest küljest, valem (2.20):

$$Eg(X) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx = \int_0^1 g(x)dx.$$

2. $X(\omega) = |\omega - 0.5|$. Tihedusfunktsioon

$$f(s) = \begin{cases} 2, & \text{kui } s \in [0, \frac{1}{2}]; \\ 0, & \text{mujal.} \end{cases}$$

Teame, et $Eg(X) = \int_0^1 g(|\omega - 0.5|)d\omega$. Teisest küljest, valem (2.20):

$$Eg(X) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx = 2\int_0^{0.5} g(x)dx,$$

mis tuleneb Riemanni integraali muutuja vahetuse valemist (kuidas?)

3. $X(\omega) = 4\omega^2$. Tihedusfunktsioon on

$$f(s) = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{s}}, & \text{kui } s \in (0, 4); \\ 0, & \text{mujal.} \end{cases}$$

Kasutades Lebesgue'i integraali definitsiooni ja muutuja vahetust integraalis saame seose (2.20):

$$Eg(X) = \int_0^1 g(4\omega^2)d\omega = \int_0^4 \frac{g(s)}{4\sqrt{s}}ds = \int_{-\infty}^{\infty} g(s)f(s)ds.$$

Tõepoolest, $s = 4\omega^2$, $ds = 8\omega d\omega = 4\sqrt{s}d\omega$, millest $d\omega = \frac{ds}{4\sqrt{s}}$.

4. $X(\omega) = e^{\omega}$. Tihedusfunktsioon on

$$f(s) = \begin{cases} \frac{1}{s}, & \text{kui } s \in [1, e]; \\ 0, & \text{mujal.} \end{cases}$$

Kasutades Lebesgue'i integraali definitsiooni ja muutuja vahetust integraalis saame seose (2.20):

$$Eg(X) = \int_0^1 g(e^{\omega})d\omega = \int_1^e \frac{g(s)}{s}ds = \int_{-\infty}^{\infty} g(s)f(s)ds.$$

Tõepoolest, $s = e^{\omega}$, $ds = e^{\omega}d\omega = sd\omega$, millest, $d\omega = \frac{ds}{s}$.

5. Olgu

$$X(\omega) = \begin{cases} 2\omega, & \text{kui } \omega \leq \frac{1}{4}; \\ \sqrt{\omega}, & \omega > \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Tihedusfunktsioon

$$f(s) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{kui } s \in [0, \frac{1}{2}]; \\ 2s & \text{kui } s \in (\frac{1}{2}, 1]; \\ 0, & \text{mujal.} \end{cases}$$

Kasutades Lebesgue'i integraali definitsiooni ja muutuja vahetust integraalis saame seose (2.20):

$$Eg(X) = \int_0^{\frac{1}{4}} g(2\omega)d\omega + \int_{\frac{1}{4}}^1 g(\sqrt{\omega})d\omega = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{g(s)}{2}ds + \int_{\frac{1}{2}}^1 g(s)2sds = \int_{-\infty}^{\infty} g(s)f(s)ds.$$

Veendu selles.

Ilma keskväärtuseta juhuslikud suurused. Selleks, et juhuslikul suurusel X oleks lõplik keskväärtus on tarvilik, et $E|X| < \infty$. On aga palju juhuslikke suurusi, mille korral see tingimus pole täidetud. Näiteks olgu X diskreetne juhuslik suurus, mille väärtsed on nullist erinevas täisarvud ning $\mathbf{P}(X = k) = Ak^{-2}$, $k = \cdots - 2, -1, 1, 2, \cdots$, kus A on selline, et $\sum_k Ak^{-2} = 1$ (selline A kindlasti leidub, miks?). Ent

$$\sum_k |k|\mathbf{P}(X = k) = 2\sum_{k=1}^{\infty} Ak^{-1} = \infty.$$

Seega sellisel juhuslikul suurusel pole keskväärtust.
Olgu X pidev juhuslik suurus tihedusega

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}, \quad -\infty < x < \infty. \tag{2.21}$$

Funktsioon $f(x)$ on tihedus, sest $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. Et aga

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|}{\pi(1 + x^2)}dx = \infty,$$

pole selle tihedusega juhuslikul suursel keskväärtust.

2.2.2 Dispersioon

Keskväärtus formalisserib intuitiivset arusaama juhusliku suuruse "keskmisest väärtusest". Samas ei ütle keskväärtus midagi juhusliku suuruse "juhuslikkuse"või "hajuvuse"kohta. Vaateleme kolme juhuslikku suurust X, Y, Z jaotustabelitega vastavalt

-1	0	1
0.05	0.9	0.05

,

-1	0	1
0.45	0.1	0.45

,

-100	100
0.5	0.5

.

Veendu, et $EX = EY = EZ = 0$. Samas on selge, X on suure tõenäosusega võrdne oma keskväärtusega, Y hälbib sellest rohkem ning Z väärtused on alati keskväärtusest väga kaugel. Seega keskväärtus üksi ei anna palju informatsiooni, oluline on ka hajuvus keskväärtuse ümber. Seda mõõdetakse tihti (kuid mitte ainult) dispersiooni ja standardhälbega.

Definitsioon 2.2.3 *Keskväärtust omava juhusliku suuruse* **dispersiooniks** *(variance) nimetatakse suurust*

$$DX = E(X - EX)^2.$$

Väide 2.2.3 *Kehtib võrdus*

$$DX = E(X^2) - (EX)^2.$$

Tõestus. Ülesanne. ■

Dispersiooni numbriline väärtus ei ole üldjuhul hästi interpreteeritav, seda eriti juhul, kui juhuslikul suuruse X väärtusel on mingi loomulik ühik (näiteks Eesti kroon aktsiaturul investeerimise korral). Samas aga ruutjuur dispersioonist on juhusliku suurusega X samasuguse ühikuga suurus.

Definitsioon 2.2.4 *Juhusliku suuruse X* **standardhälbeks** *(standard deviation) nimetatakse suurust*

$$\sigma_X = \sqrt{DX}.$$

Dispersiooni mõningad lihtsamad omadused on toodud järgnevas lemmas.

Lemma 2.2.2 *Olgu X keskväärtust omav juhuslik suurus ning $c \in \mathbb{R}$ mingi konstant. Siis kehtivad järgnevad tulemused.*

1. $DX \geq 0$.
2. *Kui* $\mathbf{P}(X = c) = 1$, *siis* $DX = 0$.
3. *Kui* $DX = 0$, *siis leidub konstant c nii, et* $\mathbf{P}(X = c) = 1$.
4. *Konstandi liitmine ei muuda dispersiooni:* $D(X + c) = DX$.
5. $D(cX) = c^2 DX$.
6. *Kui* $EX = 0$, *siis* $DX = EX^2$.

Tõestus. Ülesanne. ■

Näited: (dispersioon)

1. Vaatleme ülaltoodud kolme juhuslikku suurust X, Y, Z. Leiame nende dispersioonid.

$$\begin{aligned} DX &= E(X - EX)^2 = EX^2 = 0.05 + 0 + 0.05 = 0.1 \\ DY &= EY^2 = 0.45 + 0 + 0.45 = 0.9 \\ DZ &= EZ^2 = 100^2 = 10000. \end{aligned}$$

2. Olgu $X = I_A$, kus $A \in \mathcal{F}$. Jaotustabel

0	1
$1 - \mathbf{P}(A)$	$\mathbf{P}(A)$

Keskväärtused: $EX = \mathbf{P}(A)$. $EX^2 = \mathbf{P}(A)$. Seega

$$D(X) = EX^2 - (EX)^2 = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A)^2 = \mathbf{P}(A)(1 - \mathbf{P}(A)).$$

3. Olgu X kirjade arv ausa mündi kolmel viskel. Jaotustabel

0	1	2	3
$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Keskväärtused: $EX = \frac{3}{2}$, $EX^2 = 3$. Seega dispersioon

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}.$$

4. Olgu X vappide arv sellise mündi n korda viskamisel, kus vapi tulemise tõenäosus on p (ülaltoodud näide 2). Jaotustabel

0	1	2	3	$\cdots$	r	$\cdots$	n
$(1-p)^n$	$np(1-p)^{n-1}$	$C_n^2p^2(1-p)^{n-2}$	$C_n^3p^3(1-p)^{n-3}$	$\cdots$	$C_n^rp^r(1-p)^{n-r}$	$\cdots$	p^n

Keskväärtus $EX = np$. Leiame EX^2. Vastavalt valemile (2.19)

$$EX^2 = \sum_{r=0}^{n} r^2 C_n^r p^r (1-p)^{n-r}.$$

Kasutame seost

$$nC_{n-1}^{r-1} = rC_n^r,$$

Seega, võttes $s = r-1$

$$EX^2 = \sum_{r=0}^{n} r^2 C_n^r p^r (1-p)^{n-r} = np\sum_{r=1}^{n} rC_{n-1}^{r-1}p^{r-1}(1-p)^{n-r} = np\sum_{s=0}^{n-1}(s+1)C_{n-1}^{s}p^s(1-p)^{n-s-1}$$
$$= np[\sum_{s=0}^{n-1} sC_{n-1}^{s}p^s(1-p)^{n-s-1} + 1] = np[(n-1)p+1].$$

Seega

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = np[(n-1)p+1] - (np)^2 = np(1-p).$$

5. Olgu X mündi visete arv esimese vapini, vapi tulemise tõenäosus on p. Jaotustabel

1	2	3	4	$\cdots$
p	$p(1-p)$	$p(1-p)^2$	$p(1-p)^3$	$\cdots$

Keskväärtus: $EX = \frac{1}{p}$, $EX^2 = \frac{2-p}{p^2}$. Dispersioon seega

$$DX = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}.$$

6. Olgu X tihedusfunktsioon

$$f(s) = \begin{cases} 1, & \text{kui } s \in [0,1]; \\ 0, & \text{mujal.} \end{cases}$$

Teame, et $EX = \frac{1}{2}$ ja $EX^2 = \frac{1}{3}$. Seega

$$DX = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

7. Olgu X tihedusfunktsioon

$$f(s) = \begin{cases} 2, & \text{kui } s \in [0,\frac{1}{2}]; \\ 0, & \text{mujal.} \end{cases}$$

Teame, et $EX = \frac{1}{4}$ ning

$$EX^2 = 2\int_0^{\frac{1}{2}} x^2 dx = \frac{1}{12}.$$

Seega

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{1}{12} - \frac{1}{16} = \frac{1}{48}.$$

8. Olgu X tihedusfunktsioon

$$f(s) = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{s}}, & \text{kui } s \in (0,4); \\ 0, & \text{mujal.} \end{cases}$$

Teame, et $EX = \frac{4}{3}$. Kasutades seost (2.13) saame

$$EX^2 = \int_0^4 \frac{1}{4\sqrt{s}} s^2 ds = \frac{1}{4}\int_0^4 s^{\frac{3}{2}} ds = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5}[4^{\frac{5}{2}} = 8.$$

Dispersioon $DX = 8 - \frac{16}{9}$.

9. Olgu X tihedusfunktsioon on

$$f(s) = \begin{cases} \frac{1}{s}, & \text{kui } s \in [1,e]; \\ 0, & \text{mujal.} \end{cases}$$

Teame, et $EX = e - 1$. Kasutades seost (2.13) saame

$$EX^2 = \int_1^e \frac{1}{s} s^2 ds = \int_1^e s ds = \frac{s^2}{2}\Big|_1^e = \frac{e^2-1}{2}.$$

Dispersioon

$$DX = \frac{e^2-1}{2} - (e-1)^2.$$

10. Olgu X jaotusfunktsioon

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x < 0, \\ x & \text{kui } 0 \le x < 0.5, \\ 0.5 & \text{kui } 0.5 \le x < 1, \\ 1 & \text{kui } x \ge 1. \end{cases}$$

Teame, et $EX = \frac{5}{8}$ ja $EX^2 = \frac{13}{24}$. Seega dispersioon

$$DX = \frac{13}{24} - \frac{25}{64} = \frac{8 \cdot 13 - 3 \cdot 25}{192} = \frac{29}{192}.$$

2.2.3 Juhusliku suuruse momendid

Dispersioon ja standardhäve on kõige enam juhusliku suuruse hajuvust iseloomustavad arvud. Kuid need pole ainsad. Dispersioon on sisuliselt juhusliku suuruse ruutkeskmine kaugus keskväärtusest. Ruudu asemel võib aga kasutada mistahes astet.

Definitsioon 2.2.5 *Olgu X lõpliku keskväärtusega juhuslik suurus. Arvu $E|X-EX|^p$, kus $p \geq 1$, nimetatakse juhusliku suuruse X* **tsentreeritud absoluutseks p-momendiks**.

Seega tsentreeritud absoluutne 2-moment on dispersioon. Standardhälbe asemel vaatame nüüd suurust

$$\|X-EX\|_p := \big(E|X-EX|^p\big)^{\frac{1}{p}}.$$

Näide: (tsentreeritud absoluutne p-moment) Vaatleme eespool defineeritud juhuslikke suurusi X, Y ja Z. Nende keskväärtus on 0, seega iga p korral

$$E|X-EX|^p = E|X|^p, \quad E|Y-EY|^p = E|Y|^p, \quad E|Z-EZ|^p = E|Z|^p.$$

Võttes $p=1$ saame

$$\|X\|_1 = E|X| = 0.1, \quad \|Y\|_1 = E|Y| = 0.9 \quad \|Z\|_1 = E|Z| = 100$$

suvalise p korral

$$E|X|^p = 0.1, \quad E|Y|^p = 0.9, \quad E|Z|^p = 100^p$$

ning

$$\|X\|_p = (0.1)^{\frac{1}{p}}, \quad \|Y\|_p = (0.9)^{\frac{1}{p}}, \quad \|Z\|_p = 100.$$

Pane tähele, et nii X, Y kui ka Z korral kehtivad võrratused: kui $p<q$, siis

$$\|X\|_p < \|X\|_q, \quad \|Y\|_p < \|Y\|_q, \quad \|Z\|_p = \|Z\|_q.$$

See on seaduspära: iga juhusliku suuruse korral X kehtib nn **Ljapunovi võrratus:**

$$\|X\|_p \leq \|X\|_q, \quad \text{kui } p \leq q. \tag{2.22}$$

Ljapunovi võrratusest järeldub, et iga juhusliku suuruse korral

$$E|X| \leq \sigma_X.$$

Minkowski võrratus on

$$\|X+Y\|_p \leq \|X\|_p + \|Y\|_p.$$

Minkowski võrratusest järeldub muuhulgas, et kahe suvalise juhusliku suuruse summa standardhälve pole suurem kui standardhälvete summa.

Definitsioon 2.2.6 *Keskväärtust $E|X|^p$ nimetatakse juhusliku suuruse X* **absoluutseks p-momendiks**. *Lõpliku absoluutse p-momendi korral nimetatakse (lõplikku) keskväärtust EX^p juhusliku suuruse X* **p-momendiks**.

Kokkuvõtteks: Tõenäosusruumil $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ antud juhusliku suuruse X keskväärtus on (kui see eksisteerib) tema Lebesgue'i integraal

$$EX = \int_\Omega X(\omega)\mathbf{P}(d\omega).$$

Lebesgue'i integraal üldistab Riemanni integraali: kui $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}) = ([a,b], \mathcal{B}[a,b], \ell)$ ja X on Riemanni mõttes integreeruv, siis kehtib $EX = \int_a^b X(\omega)d\omega$. Keskväärtusel on kõik integraali omadused, muuhulgas on ta lineaarne. Sellest järeldub, et konstandi võib keskväärtuse märgi alt välja tuua ja lõpliku arvu juhuslike suuruste summa keskväärtus on keskväärtuste summa.
Juhusliku suuruse X keskväärtus sõltub ainult tema jaotusfunktsioonist. Seega, kui X ja Y on kaks erinevat juhuslikku suuurust, millel on sama jaotusfunktsioon, on neil ka sama keskväärtus. Jaotusfunktsiooni kaudu on võimalik keskväärtust arvutad järgmiselt:

$$EX = \int_0^\infty (1 - F(t))dt - \int_{-\infty}^0 F(t)dt.$$

Olgu g selline funktsioon, et $g(X)$ on ka juhuslik suurus millel on lõplik keskväärtus. Kui X on pidev juhuslik suurus tihedusega f, siis $g(X)$ keskväärtust avaldub järgmiselt:

$$Eg(X) = \int_{-\infty}^\infty g(x)f(x)dx.$$

Erijuhul, kui $g(x) = x$, saame siit valem pideva juhusliku suuruse keskväärtuse arvutamiseks:

$$EX = \int_{-\infty}^\infty xf(x)dx.$$

Kui X on diskreetne juhuslik suurus jaotusega $\{(x_i, p_i)\}_{i=1}^N$, kus $N \leq \infty$, siis

$$Eg(X) = \sum_{i=1}^N g(x_i)p_i.$$

Siit saame valemi diskreetse juhusliku suuruse keskväärtuse leidmiseks:

$$EX = \sum_{i=1}^N x_i p_i.$$

Juhul, kui X pole diskreetne ega pidev, siis enamasti avaldub tema jaotusfunktsioon F kujul $F = \alpha F_a + (1-\alpha)F_d$, kus F_a on mingi pideva juhusliku suuruse, olgu see Z_a, jaotusfunktsioon, F_d on mingi diskreetse juhusliku suuruse, olgu see Z_d, jaotusfunktsioon ning $\alpha \in (0,1)$. Siis $EX = \alpha EZ_a + (1-\alpha)EZ_d$.
Lõpliku keskväärtusega juhusliku suuruse X absoluutne tsentreeritud p-moment on $E|X - EX|^p$. Kui $p = 2$, nimetatakse seda dispersiooniks ja tähistatakse DX. Ruutjuur dispersioonist on standardhälve. Absoluutne tsentreeritud p-moment mõõdab hajuvust kesväärtuse ümber. Absoluutne p-moment on $E|X|^p$ ja lihtsalt p-moment on EX^p.

2.3 Tuntumad diskreetsed jaotused

Ütleme, et juhuslikud suurused on sama **jaotusega**, kui neil on üks ja sama jaotusfunktsioon. Arvutamaks juhusliku suuruse väärtuste abil defineeritud sündmuste tõenäosusi, ei pea me enamasti teadma juhuslikku suurust kui funktsiooni, piisab kui teame tema jaotusfunktsiooni ahk jaotust. Alljärgnevas tutvume peamiste diskreetsete jaotustega (jaotusfunktsioonidega).

2.3.1 Bernoulli ehk kahepunktiline jaotus

Definitsioon 2.3.1 *Juhuslik suurus X on* **Bernoulli jaotusega***, kui tema võimalikeks väärtusteks on* 0 *ja* 1*.*

Seega indikaatorfunktsioon on I_A Bernoulli jaotusega juhuslik suurus. Harilikult tähistatakse

$$p = \mathbf{P}(X = 1), \quad q = (1 - p) = \mathbf{P}(X = 0).$$

Sellisel juhul, nagu juba teame, on Bernoulli jaotuse jaotusfunktsioon

1	0
p	q

Eelpool leidsime Bernoulli jaotusega juhusliku suuruse keskväärtuse ja dispersiooni:

$$EX = p, \quad DX = p - p^2 = p(1 - p) = pq.$$

2.3.2 Binoomjaotus

Toimugu n sõltumatut katset, igal katsel olgu sündmuse toimumise tõenäosus p. Varasemast teame, et sellisel juhul täpselt k sündmuse toimumise tõenäosus avaldub binoomjaotuse valemiga $C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$.

Definitsioon 2.3.2 *Diskreetne juhuslik suurus X on* **binoomjaotusega parameetritega** n **ja** p *(kirjutame $X \sim B(n, p)$), kui tema väärtuste hulgaks on hulk* $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ *ning kehtib võrdus*

$$\mathbf{P}(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Seega ülaltoodud näidetes vappide arv mündi n korda viskel (vapi tõenäosus on p on binoomjaotusega juhuslik suurus. Teame, et binoomjaotusega juhusliku suuruse jaotustabel on ($q = 1 - p$)

0	1	2	3	$\cdots$	r	$\cdots$	n
q^n	npq^{n-1}	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	$C_n^3 p^3 q^{n-3}$	$\cdots$	$C_n^r p^r q^{n-r}$	$\cdots$	p^n

Eelpool leidsime ka binoomjaotusega juhusliku suuruse keskväärtuse ja dispersiooni: kui $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, siis $EX = np$ ja $DX = np(1 - p) = npq$. Bernoulli jaotus on erijuht binoomjaotusest kui $n = 1$.

Näide: (binoomjaotus)

1. Vaatleme järgmist mängu: mängija arvab numbri ühest kuueni. seejärel visatakse kolm korda täringut. Kui ükski visetest ei ile arvatud number, kaotab nängija ühiku raha. Kui arvatud number ilmub i korda ($i = 1, 2, 3$), saab mängija i ühikut raha. Leida mängija keskmine võit.
   Olgu X nende visete arv, kui tuli valitud arv. On selge, et $X \sim B(\frac{1}{6}, 3)$. Olgu Y mängija võit. Seega Y jaotustabel on järgmine ($p = \frac{1}{6}$)

-1	1	2	3
$(1-p)^3$	$3p(1-p)^2$	$3p^2(1-p)$	p^3

   Veendu, et $EY = \frac{-17}{216}$, seega keskmiselt selle mänguga ei võida.

2. Kommunikatsioonisüsteem, mis kooneb n komponendist töötab, kui vähemalt pooled komponendid töötavad. Komponendid töötavad üksteisest sõltumatult, iga komponendi töötamise tõenäosus on p. Olgu $P_k(p)$ tõenäosus, et k-komponendiline süsteem töötab. Millise p korral $P_5(p) > P_3(p)$?
   Otsitav p peab rahuldama võrratust:
$$P_5(p) = p^5 + C_5^4 p^4(1-p) + C_5^3 p^3(1-p)^2 > p^3 + 3p^2(1-p).$$
   Veendu, et see võrratus on ekvivalentne $3(p-1)^2(2p-1) > 0$, mis kehtib parajasti siis, kui $p > 0.5$.

3. (a) Olgu riigis $n = 2k+1$ hääleõiguslikku kodanikku. Oletame, et presidendivalimistel kõik hääletavad üksteisest sõltumatult ning valivad ühe kahest kadidaadist tõenäosusega $\frac{1}{2}$. Leida tõenäosus, et üliõpilase A valik otsustab presidendivalimiste saatuse.
   A valik on otsustav siis, kui ülejäänud $2k$ valijast pooled valivad ühe ja pooled teise kandidaadi. See tõenäosus on
$$C_{2k}^k \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = \frac{(2k)!}{k!k!2^{2k}}.$$
   Stirlingi valemi abil saab näidata, et suure k korral see tõenäosus on ligikaudu $\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$.

   (b) U.S.A. presidendivalimistel osariigis enim hääli kogunud kandidaat saab kõik osariigi hääled ja $cn = c(2k+1)$ valijameest (siin $c > 0$ on proportsioon). Seega, kui A hääl on otsustav, sõltub temast cn valijamehe hääl. Suurtes osariikides in see suur arv, kuid samas on suurtes osariikides väiksem tõenäosus, et A hääl on otsustav. Seetõttu vaadatakse korrutist (*average power in close election*) $(cn)p$ kus $p :=P($ A hääl on otsustav), mida võib vaadata kui järgmise jaotuse keskväärtust

0	cn
$1-p$	p

   Antud juhul
$$cnp \approx \frac{cn}{\sqrt{\frac{\pi n}{2}}} = c\sqrt{\frac{2n}{\pi}}.$$
   See arv kasvab koos n-ga, millest järeldatakse, et suurte osariikide elanike hääletel on rohkem kaalu.

2.3.3 Geomeetriline jaotus

Geomeetriline jaotus vastab juhule, kus sõltumatuid katseid sooritatakse kuni vaadeldava sündmuse A (toimumistõenäosusega $p = P(A)$) esimese toimumiseni. Seega eelpool vaadeldud mündi visete arv esimese vapini (vapi tulemise tõenäosus on p) on geomeetrilise jaotusega.

Definitsioon 2.3.3 *Diskreetne juhuslik suurus X on* **geomeetrilise jaotusega parameetriga** *p, kui tema väärtuste hulgaks on naturaalarvude hulk ning jaotus on mingi $p \in (0, 1]$ korral antud valemiga*

$$\mathbf{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

ning seda tähistatakse kujul $X \sim G(p)$.

Geomeetrilise jaotuse $G(p)$ jaotustabel on

1	2	3	4	$\cdots$
p	$p(1-p)$	$p(1-p)^2$	$p(1-p)^3$	$\cdots$

Eespool leidsime geomeetrilise jaotuse keskväärtuse ja dispersiooni:

$$EX = \frac{1}{p}, \quad DX = \frac{1-p}{p^2}.$$

Veendu, et kui $X \sim G(p)$, siis iga $n = 1, 2, \ldots$ korral

$$\mathbf{P}(X > n) = (1-p)^n.$$

Geomeetrilisel jaotusel on järgmine omadus: kui $X \sim G(p)$, siis iga $k = 1, 2, \ldots$ ja $n = 1, 2, \ldots$ korral

$$\mathbf{P}(X = n+k|X > n) = \frac{\mathbf{P}(X = n+k)}{\mathbf{P}(X > n)} = \frac{(1-p)^{n+k-1}p}{(1-p)^n} = p(1-p)^{k-1} = \mathbf{P}(X = k).$$

Selle omaduse kohta öeldakse, et geomeetrilisel jaotusel pole mälu.

2.3.4 Negatiivne binoomjaotus

Negatiivne binoomjaotus üldistab geomeetrilist jaotust järgmiselt: sõltumatuid katseid, mille korral sündmuse tõenäosus on p, korratakse senikaua kuni sündmus toimub r korda. Seega vähim katsete arv on r. Kui selleks läks vaja täpselt k katset, siis

1. viimasel katsel toimus sündmus;
2. esimesel $k-1$ katsel toimus sündmus täpselt $r-1$ korda.

Seega binoomjaotuse valemi ja sõltumatuse tõttu

$\mathbf{P}$(vaja läks k katset) =
$\mathbf{P}$(esimesel $k-1$ katsel toimus sündmus täpselt $r-1$ korda)$\mathbf{P}$(viimasel katsel toimus sündmus) =
$C_{k-1}^{r-1}p^{r-1}(1-p)^{k-r}p = C_{k-1}^{r-1}p^r(1-p)^{k-r}$.

Näide: (Banachi tikutopsid) Matemaatikul on mõlemas püksitaskus tops tikke. Matemaatik valib tikke võttes tasku juhuslikult (tõenäosusega 0.5). Olgu $A = \{$ hetkel, mil matemaatik avastab, et paremas taskus olev tops on tühi, on vasakus taskus k tikku. } Eeldame, et algselt oli mõlemas topsis N tikku. Matemaatik avastab, et parem tasku on tühi kui ta $N+1$-st korda sirutab käe paremasse taskusse. Teisest taskust on võetud selleks hetkeks $N-k$ tikku. Kokku oli $N+1+N-k$ katset tikku haarata (neist viimane edutu), millest N edukat ja viimane edutu katse läksid paremasse taskusse. Seega

$$\mathbf{P}(A) = C_{2N-k}^{N}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{2N-k+1}.$$

Definitsioon 2.3.4 *Diskreetne juhuslik suurus X on* **negatiivse binoomjaotusega parameetritega** n **ja** p *(kirjutame $X \sim NegB(r,p)$), kui tema väärtuste hulgaks on hulk $\{r, r+1, r+2, \ldots\}$ ning kehtib võrdus*

$$\mathbf{P}(X=k) = C_{k-1}^{r-1}p^r(1-p)^{k-r}, \quad k = r, r+1, r+2, \ldots,$$

Seega, $NegB(1,p)$ jaotus on sama mis $G(p)$.

Leiame begatiivse binoomjaotusega juhusliku suuruse k-nda momendi. Selleks kasutame jällegi seost

$$nC_{n-1}^{r-1} = rC_n^r.$$

Saame

$$\begin{aligned} EX^k &= \sum_{n=r}^{\infty} n^k C_{n-1}^{r-1} p^r (1-p)^{n-r} = \frac{r}{p}\sum_{n=r}^{\infty} n^{k-1} C_n^r p^{r+1}(1-p)^{n-r} \\ &= \frac{r}{p}\sum_{m=r+1}^{\infty}(m-1)^{k-1}C_{m-1}^r p^{r+1}(1-p)^{m-(r+1)} \\ &= \frac{r}{p}E[(Y-1)^{k-1}], \end{aligned}$$

kus $Y \sim NegB(r+1,p)$. Võttes $k=1$, saame siit (kuidas?), et

$$EX = \frac{r}{p}.$$

Võttes $k=2$, saame siit

$$EX^2 = \frac{r}{p}E(Y-1) = \frac{r}{p}(\frac{r+1}{p}-1).$$

Seega

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{r}{p}(\frac{r+1}{p}-1) - \big(\frac{r}{p}\big)^2 = \frac{r(1-p)}{p^2}.$$

Veendu, et kui $r=1$, siis toodud valemitest saame geomeetrilise jaotuse keskväärtuse ja dispersiooni.

2.3.5 Poissoni jaotus

Definitsioon 2.3.5 *Juhuslik suurus on* **Poissoni jaotusega** *($X \sim Po(\lambda)$), kui tema väärtuste hulgaks on kõigi mittenegatiivsete täisarvude hulk ning kehtivad võrdused*

$$\mathbf{P}(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

Poissoni jaotusega juhusliku suuruse keskväärtuse ja dispersiooni leidmiseks kasutame võrdust

$$e^{x-\lambda} = e^x e^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} e^{-\lambda},$$

kust diferentseerides ja x-ga korrutades saame võrdused

$$\sum_{k=0}^{\infty} k \frac{x^k}{k!} e^{-\lambda} = x e^{x-\lambda}$$

ja

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{x^k}{k!} e^{-\lambda} = x(x+1) e^{x-\lambda}.$$

Kasutades neid võrduseid juhul $x = \lambda$ saame

$$EX = \lambda, \quad DX = EX^2 - (EX)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} - \lambda^2 = \lambda(\lambda+1) - \lambda^2 = \lambda.$$

Binoomjaotuse lähendamine Poissoni jaotusega

Teoreem 2.3.6 **(Poissoni piirteoreem)** *Olgu $X_n \sim B(n, p_n)$ selline binoomjaotusega juhuslike suuruste jada, et $EX_n = np_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda > 0$. Siis binoomjaotuse tõenäosused koonduvad Poissoni jaotuse tõenäosusteks:*

$$\mathbf{P}(X_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Teoreemi tõestame kursuses TNT2 (Teoreem 15.6).

Poissoni piirteoreem on praktikas väga kasulik. Vaatleme olukorda, kus sooritati n katset, igal katsel võib sündmus toimuda tõenäosusega p. Vastaval binoomjaotuse valemile on tõenäosus, et toimus täpselt k sündmust $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$. Suure n korral pole seda kerge arvutada ja siin tuleb appi Poissoni piirteoreem: kui toimumise tõenäosus p on piisavalt väike ja katsete arv piisavalt n suur, on tõenäosus, et n katsel toimus k ligikaudu võrdne Poissoni tõenäosusega parameetriga $\lambda = np$. Seega, kui n on piisavalt suur ja p piisavalt väike, siis

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{(np)^k}{k!} e^{-(np)}.$$

Näited (Poissoni piirteoreem):

1. Olgu grupis 400 inimest, X olgu nende inimeste arv, kellel on sünnipäev 16. detsembril. Ignoreerides liigaastaid, saame $X \sim B(400, \frac{1}{365})$. Poissoni lähend sellele jaotusele on $Po(\frac{400}{365})$. Seega tõenäosus, et ühelgi neist pole sünnipäev 16. detsembril, on $\mathbf{P}(X=0) = \left(\frac{364}{365}\right)^{400}$, Poissoni lähend on $\exp[-\frac{400}{365}]$.

2. Kahte täringut visatakse 36 korda. Olgu X nende visete arv, mis annab paari 6 ja 6; $X \sim B(36, \frac{1}{36})$. Poissoni lähend sellele jaotusele on $Po(1)$. Järgnev tabel näitab, et tegemist on hea lähendiga:

k	0	1	2	3
$Po(1)$	0.3678	0.3678	0.1839	0.0613
$B(36, \frac{1}{36})$	0.3627	0.3730	0.1865	0.0604

3. Radioaktiivse aatomi lagunemisel kiirgub α-osake. Olgu teada, et 1 grammi rasdioaktiivse aine lagunemisel kiirgub keskmiselt λ osakest sekundis. Vaatleme 1 grammi ainet kui n aatomi kogumit. Igaüks neist laguneb ja kiirgab α-osakese 1 sekundi jooksul tõenäosusega p. Seega keskmiselt laguneb $np = \lambda$ aatomit, millest $p = \frac{\lambda}{n}$. Seega 1 sekundi jooksul lagunenud aatomite arv, X, on jaotusega $B(n, \frac{\lambda}{n})$. Selle jaotuse Poissoni lähend on $Po(\lambda)$. Oletame, et meid huvitab tõenäosus, et 1 sekundi jooksul ei kiirgu üle 2 osakese. Kasutades Poissoni lähendit, saame

$$\mathbf{P}(X \leq 2) \approx e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} + \frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda}.$$

1920.-l aastal viisis Rutherford, Chadwick ja Ellis läbi järgmise katse. Nad registreerisid 7.5 sekundi jooksul kiirgunud α-osakesi. Selleks jagasid nad pika ajalõigu 7.5 sekundi pikkusteks intervallideks ja lugesid kokku igas ajaintervallis registreeritud osakeste arvu. Kokku registreeriti 10094 α-osakest $N := 2608$ intervalli jooksul. Seega keskmiselt $\frac{10094}{2608} \approx 3.87$ osakest intervallis. Seega ajaintervallis registreeritud osakeste arv on ligikaudu $Po(3.87)$ jaotusega. Järgnevas tabelis on N_k nende intervallide arv, kus mõõdeti k osakest. Võrdluseks on

$$N \exp[-3.87] \frac{3.87^k}{k!} =: Np_k.$$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	≥ 10
N_k	57	203	383	525	532	408	273	139	45	27	16
Np_k	54.4	210.5	407.3	525.5	508.4	393.5	253.8	140.3	67.8	29.2	17

4. 10000-pealisest linnuparvest on rõngastatud 100. Aasta jooksul püüavad ornitoloogid vaatluse eesmärgil paarvest 200 lindu (ükshaaval, lastes hiljem tagasi). Leiame tõenäosused, et püütud lindude hulgas on 0 rõngastatut,1 rõngastatud, 2 rõngastatut, 3 rõngastatut, 4 rõngastatut, 5 rõngastatut. Kui me eeldame, et vaatlused on sõltumatud, siis rõngastatud lindude arv, olgu see X on binoomjaotusegam st $X \sim B(200, 0.01)$. Binoomjaotuse valemi järgi saame leida $\mathbf{P}(X = k)$; alljärgnevas tabelis on need tõenäosused $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ korral.

k	0	1	2	3	4	5
p_k	0,13398	0,27067	0,27203	0,18136	0,09022	0,03572

.

Arvestades eelnevat piirteoreemi võime vastavate tõenäosuste arvutamisel kasutada ka Poissoni jaotust parameetriga $\lambda = 200 \cdot 0,01 = 2$, sel juhul saame

k	0	1	2	3	4	5
p	0,13534	0,27067	0,27067	0,180447	0,09022	0,03609

Nagu näha, on saadud tõenäosused tõepoolest väga lähedased.

5. Kalamees kalastab järvel, kus elab n kala. Neist igaüks näkkab tunni aja jooksul tõenäosusega p. Tõenäosus, et tunni aja jooksul ükski kala ei näkanud on $\alpha \in (0,1)$. Hinnata tõenäosust p.
   Tõenäosus, et tunnu aja jooksul ükski kala ei näkka on $(1-p)^n$ Võrrandist $(1-p)^n = \alpha$ saame $\ln(1-p) = \frac{\ln\alpha}{n}$. Et $\ln(1-p) \approx -p$, siis $p \approx -\frac{\ln\alpha}{n}$.
   Teine võimalus: näkkamiste arv ligikaudu Poissoni jaotusega Po(np). Tõenäosus, et ükski kala ei näkanud seega ligikaudu $\exp[-np]$. Seega $\exp[-np] \approx \alpha$, millest $p \approx -\frac{\ln\alpha}{n}$.

2.4 Näiteid pidevatest jaotustest

2.4.1 Ühtlane jaotus

Definitsioon 2.4.1 *Öeldakse, et juhuslik suurus X on* **ühtlase jaotusega lõigul** $[a,b]$ *(tähistatakse $X \sim U[a,b]$, kui tema tihedusfunktsioon avaldub kujul*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \textit{kui } x \in [a,b] \\ 0 & \textit{mujal.} \end{cases}$$

Ühtlase jaotusega juhusliku suuruse jaotusfunktsioon avaldub kujul

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{kui } a \le x < b \\ 1 & \text{kui } x \ge b. \end{cases}$$

Meile on juba tuttavad jaotused $U[0,1]$ ja $U[0,\frac{1}{2}]$. Teame, et kui $X \sim U[0,1]$, siis $EX = \frac{1}{2}$ ja $DX = \frac{1}{12}$. Samuti teame, et kui $X \sim U[0,\frac{1}{2}]$, siis $EX = \frac{1}{4}$ ja $DX = \frac{1}{48}$. Leiame $U[a,b]$ keskväärtuse ja dispersiooni. Keskväärtus on definitsiooni põhjal

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}\, dx = \frac{x^2}{2(b-a)}\Big|_{x=a}^{b} = \frac{a+b}{2}$$

ning dispersioon avaldub valemina

$$DX = E[(X-EX)^2] = \int_a^b (x - \frac{a+b}{2})^2 \frac{1}{b-a}\, dx = \left.\frac{(x-\frac{a+b}{2})^3}{3(b-a)}\right|_a^b = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Ühtlane jaotus formaliseerib geomeetrilise tõenäosuse lõigul $[a,b]$.

Võrrandi $F(x) = \frac{1}{2}$ lahendit (kui see leidub), nimetatakse jaotused (juhusliku suuruse) **mediaaniks**. Mediaan on arv, millest suurame või väiksema väärtuse saamise tõenäosus on võrdne. Ühtlase jaotuse mediaan on võrdne tema keskväärtusega $\frac{a+b}{2}$.

Jaotusega F juhusliku suuruse genereerimine ühtlase jaotuse abil. Olgu $F : [c, d] \mapsto [0, 1]$, kus $-\infty \leq c < d \leq \infty$ rangelt kasvav pidev jaotusfunktsioon. Sellisel funktsioonil on pöördfunktsioon $F^{-1} : (0, 1) \mapsto [c, d]$. Olgu $X \sim U[0, 1]$ ühtlase jaotusega juhuslik suurus. Siis $Y := F^{-1}(X)$ on jaotusfunktsiooniga F juhuslik suurus. Selles on lihtne veenduda:

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= \mathbf{P}(Y \leq t) = \mathbf{P}(F^{-1}(X) \leq t) = \mathbf{P}\{\omega : F^{-1}(X(\omega)) \leq t\} \\ &= \mathbf{P}\{\omega : X(\omega) \leq F(t)\} = \mathbf{P}(X \leq F(t)) = F(t). \end{aligned}$$

Viimane võrdus tuleneb ühtlase jaotuse jaotusfunktsiooni definitsioonist. Toodud ideed saab kasutada ka siis, kui F pole rangelt kassvav ja pidev. Sellisel juhul jaotusfunktsioonil F puudub pöördfunktsioon, kuid saab defineerida nn üldistatud pöördfunktsiooni nii, et ülaltoodud argument põhimõtteliselt kehtib. Seda meetodi nimetatakse ka *Skorohodi esituseks* (vt TNT2 4.6).

2.4.2 Eksponentjaotus

Definitsioon 2.4.2 *Öeldakse, et juhuslik suurus X on* **eksponentjaotusega parameetriga** λ *($\lambda > 0$, tähistatakse kujul $X \sim Exp(\lambda)$), kui tema tihedusfunktsioon on*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \textit{kui } x < 0, \\ \lambda\, e^{-\lambda x}, & \textit{kui } x \geq 0. \end{cases}$$

Eksponentjaotusega juhusliku suuruse jaotusfunktsioon on

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{kui } x \geq 0. \end{cases}$$

Tõepoolest, kui $x > 0$, siis

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)ds = \lambda \int_{0}^{x} e^{-\lambda s} ds = -e^{-\lambda s}|_0^x = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Ositi integreerides (kuidas) saame keskväärtuseks

$$EX = \int_0^\infty x\, \lambda\, e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}.$$

Dispersiooni leidmiseks leiame (ositi integreerimine)

$$EX^2 = \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = -x^2 e^{-\lambda x}|_0^\infty + 2 \int_0^\infty x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} 2 \int_0^\infty x \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Seega

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Võrrandi $F(x) = \frac{1}{2}$ lahendamisel saame leida mediaani:

$$1 - e^{-\lambda x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

Eksponentjaotus on geomeetrilise jaotuse pidev analoog ja tal pole mälu: kui $X \sim Exp(\lambda)$, siis

$$\mathbf{P}(X \le t+k|X > t) = \frac{\mathbf{P}(t < X \le t+k)}{\mathbf{P}(X > t)} = \frac{F(t+k)-F(t)}{1-F(t)} = \frac{e^{-\lambda t}-e^{-\lambda(t+k)}}{e^{-\lambda t}} = 1-e^{-\lambda k} = \mathbf{P}(X \le k).$$

Saab näidata, et eksponentjaouts on ainus sellise omadusega pidev jaotus. Eksponentjaotuse abil modelleeritakse tihti elu- või tööiga. Kui lambipirni tööiga on eksponentjaotusega ja pirn on juba aasta vastu pidanud, siis tõenäosus, et ta peab veel k kuud vastu on täpselt sama suur kui uuel pirnil (või pirnil, mis on 2 aastat vastu pidanud). Kui bussid saabuvad peatusesse juhuslikult ning nende saabumisaegade vahed on eksponentjaotusega, siis bussipetusesse saabuja ootamisaja jaotus ei sõltu sellest, kas eelmine buss lahkus äsja või tükk aega tagasi.

Eksponentjaotuse jaotusfunktsioon on pidev rangelt kasvav piirkonnas $[0,\infty)$. Jaotusfunktsiooni pöördfunktsioon on

$$F^{-1}(t) = \frac{\ln(1-t)}{\lambda}, \quad t \in (0,1).$$

Seega, kui $X \sim U[0,1]$, siis juhuslik suurus Kui $Y = -\frac{\ln(1-X)}{\lambda}$ on jaotusega $Exp(\lambda)$.

2.4.3 Normaaljaotus (Gaussi jaotus)

Definitsioon 2.4.3 *Juhuslik suurus X on* **normaaljaotusega parameetritega $\mu \in \mathbb{R}$ ja $\sigma >$** **0** *(tähistatakse $X \sim N(\mu,\sigma)$), kui tema tihedusfunktsioon avaldub kujul*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Parameetritega $\mu = 0$, $\sigma = 1$ normaaljaotust nimetatakse **standardseks normaaljaotuseks**.

Veendume kõigepealt, et definitsioonis antud funktsioon sobib jaotusfunktsiooniks. Selleks peame kontrollima, integraal temast on 1. Tähistame

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx,$$

siis muutujavahetust $s = \frac{x-\mu}{\sigma}$ kasutades saame

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2}}\,ds.$$

Seega

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2}}\,ds \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \qquad = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{s^2+t^2}{2}}\,ds\,dt.$$

Kasutades kahekordses integraalis üleminekut polaarkoordinaatidele $s = r\cos\theta,\ t = r\sin\theta$ saame

$$I^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} r\,dr\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}}\,d(\frac{r^2}{2}) = 1.$$

Kuna $I > 0$, siis siit järeldub võrdus $I = 1$, seetõttu on tõepoolest iga μ ja $\sigma > 0$ korral tegemist tihedusfunktsiooniga.

Normaaljaotuse keskväärtus ja dispersioon. Järgnevalt näitame, et jaotusega $N(\mu,\sigma)$ juhusliku suuruse keskväärtuse on μ ja dispersioon on σ^2. Arvutame kõigepealt keskväärtuse. Definitsioonist lähtuvalt saame

$$\begin{aligned}
EX &= \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu+\mu) f(x)\,dx \\
&= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\mu)}{\sigma^2} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx + \mu \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \\
&= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} (-e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}})\Big|_{x=-\infty}^{\infty} + \mu \\
&= \mu.
\end{aligned}$$

Dispersiooni arvutamisel tuleb kasutada ositi integreerimist:

$$\begin{aligned}
DX = E[(X-EX)^2] &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx \\
&= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)\cdot\left[\frac{x-\mu}{\sigma^2} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right] dx \\
&= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} (x-\mu)(-e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}})\Big|_{x=-\infty}^{\infty} + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx \\
&= 0 + \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \\
&= \sigma^2.
\end{aligned}$$

Normaaljaotuse jaotusfunktsioon ei ole esitatav elementaarfunktsioonide kaudu, seetõttu tema väärtuste arvutamiseks tuleb kasutada numbrilisi meetodeid või tabeleid. Standardse normaaljaotuse jaotusfunktsiooni väärtuste tabelid on laialdaselt saadaval ning järgnev lemma võimaldab suvaliste parameetritega normaaljaotusega juhusliku suuruse X väärtuse mingisse vahemikku kuulumise tõenäosust taandada standardse normaaljaotuse jaotusfunktsiooni kasutamisele.

Lemma 2.4.1 *Olgu $X \sim N(\mu,\sigma)$. Siis juhuslik suurus $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ on standardse normaaljaotusega.*

Tõestus. Paneme tähele, et juhusliku suuruse Y jaotusfunktsioon avaldub kujul

$$\begin{aligned}
F_Y(y) = \mathbf{P}(Y \le y) &= \mathbf{P}(\frac{X-\mu}{\sigma} \le y) = \mathbf{P}(X \le \sigma y + \mu) = F_X(\sigma y + \mu) \\
&= \int_{-\infty}^{\sigma y+\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(s-\mu)^2}{2\sigma^2}} ds = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du,
\end{aligned}$$

kus $u = \frac{(s-\mu)}{\sigma}$, $\quad ds = \sigma du$. Et

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$$

on standardse normaaljaotuse tihedusfunktsioon, on lemma tõestatud. ■

Järeldus 2.4.1 *Olgu $Z \sim N(0,1)$, $\sigma > 0$ ja $\mu \in \mathbb{R}$ suvalised konstandid. Siis juhuslik suurus $X = \sigma Z + \mu$ on normaaljaotusega keskväärtusga μ ja standardhälbega σ, st $X \sim N(\mu,\sigma)$.*

Tõestus. Kasutades lemma tõestusest tuttavat muutuja vahetust, saame

$$\mathbf{P}(X \leq x) = \mathbf{P}(Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}) = \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(s-\mu)^2}{2\sigma^2}} ds.$$

■

Märkus: Olgu X suvaline (mitte ilmtingimata normaaljaotusega ega pidev) juhuslik suurus, mille on lõplik keskväärtus ja dispersioon. Siis juhusliku suuruse $Y = \frac{X-EX}{\sqrt{DX}}$ keskväärtus on 0 ja dispersioon 1, st $EY = 0$ ja $DY = 1$ (veendu selles). Ülaltoodud lemma väidab lisaks, et kui X on normaaljaotusega, siis Y on ka normaaljaotusega.

Lemma 2.4.1 abil saab normaaljaotusega juhusliku suuruse $X \sim N(\mu, \sigma)$ tõenäosusi $\mathbf{P}(a < X \leq b)$ või $\mathbf{P}(a < X < b)$, $\mathbf{P}(a \leq X \leq b)$,$\mathbf{P}(a \leq X < b)$, sest need on kõik samad (miks?) leida standardse normaaljaotuse jaotusfunktsiooni, mida harilikult tähistatakse tähega Φ, kaudu. Selleks paneme tähele, et

$$\{\omega : a < X(\omega) \leq b\} = \Big\{\frac{a-\mu}{\sigma} < \frac{X(\omega)-\mu}{\sigma} \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\Big\},$$

millest

$$\mathbf{P}(a < X \leq b) = \mathbf{P}\Big(\frac{a-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\Big) = \Phi\Big(\frac{b-\mu}{\sigma}\Big) - \Phi\Big(\frac{a-\mu}{\sigma}\Big). \tag{2.23}$$

Näide. Olgu $X \sim N(1,3)$. Leiame $\mathbf{P}(0 < X \leq 3)$. Selleks defineerime $Y = \frac{X-1}{3}$ ning kasutame valemit (2.23):

$$\mathbf{P}(0 < X \leq 3) = \mathbf{P}(-\frac{1}{3} < Y \leq \frac{2}{3}) = \Phi(\frac{2}{3}) - \Phi(-\frac{1}{3}),$$

kus Φ on standardse normaaljaotuse jaotusfunktsioon. Standardse normaaljaotuse tihedusfunktsioon on sümmeetriline nullpunkti suhtes, mistõttu kehtib valem $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$, seega võime tulemuse esitada ka kujul

$$\mathbf{P}(0 < X \leq 3) = \Phi(\frac{2}{3}) + \Phi(\frac{1}{3}) - 1.$$

Tabelitest leiame

$$\Phi(\frac{2}{3}) \approx 0.74857,\ \ \Phi(\frac{1}{3}) \approx 0.62930,$$

seega on otsitav tõenäosus ligikaudu 0,37787.

Binoomjaotuse lähendamine normaaljaotusega. Poissoni piirteoreemist teame, et kui $X_n \sim B(n,p)$ ja $np_n \to \lambda$, siis suure n korral X_n on ligikaudu Po(λ)-jaotusega. Selgub aga, et kui $X_n \sim B(n,p)$, siis suure n korral on X_n ligikaudu normaaljaotusega $N(pn, \sqrt{(1-p)pn})$. Siinkohal tuleb silmas pidada, et kuitahes suure n korral X_n on ikka disktreetse jaotusega, mistõttu mõiste "ligikaudu"tuleb täpselt defineerida.
Tuletame meelde, et kui $X \sim B(n,p)$, siis

$$Y = \frac{X - np}{\sqrt{(1-p)pn}}$$

on keksväärtusega 0 ja dispersiooniga 1 (kuid mitte enam binoomjaotusega) juhuslik suurus.

Teoreem 2.4.4 (De Moivre-Laplace piirteoreem) *Olgu* $X_n \sim B(n, p_n)$*. Siis iga* $-\infty \leq a < b \leq \infty$ *korral*

$$\mathbf{P}\Big(a < \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b\Big) \to \Phi(b) - \Phi(a). \tag{2.24}$$

Toodud teoreem on erijuht üldisest piiretoreemist, mida tuntakse tsentraalse piirteoreemina. Tsentraalseid piirteoreeme tõestame kursuses TNT2 (ptk 15).

De Moivre-Laplace piirteoreem väidab, et suure n korral

$$\mathbf{P}\Big(a < \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b\Big) \approx \mathbf{P}(a < Z \leq b),$$

kus $Z \sim N(0,1)$. Seega suure n korral

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(c < X_n \leq d) &= \mathbf{P}\big(\frac{c-np}{\sqrt{np(1-p)}} < \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{d-np}{\sqrt{np(1-p)}}\big) \\ &\approx \mathbf{P}\big(\frac{c-np}{\sqrt{np(1-p)}} < Z \leq \frac{d-np}{\sqrt{np(1-p)}}\big) \\ &= \mathbf{P}\big(c < Z\sqrt{np(1-p)} + np \leq d\big),\end{aligned}$$

kus $Z \sim N(0,1)$. Järeldusest teame, et $Z\sqrt{np(1-p)} + np \sim N(np, \sqrt{np(1-p)})$. Seega, kui n on suur ja p mitte väga väike, on binoomjaotus $B(n,p)$ teatavas mõttes lähedane sama keskväärtusega ja dispersiooniga normaaljaotusega.

Näited: (DeMoivre-Laplace'i teoreem)

1. Kulli ka kirja visati 40 korda. Leiame tõenäosuse, et tuli 20 kirja. Täpne tõenäosus: binoomjaotuse valem
$$C_{40}^{20}(0.5)^{40} \approx 0.1254.$$
Normaaljaotuse lähend: Olgu $X \sim B(40, 0.5)$. Siis $np = 20$, $\sqrt{np(1-p)} = \sqrt{10}$ ja
$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X = 20) = \mathbf{P}(19.5 < X < 20.5) &= \mathbf{P}\Big(\frac{19.5 - 20}{\sqrt{10}} < \frac{X - 20}{\sqrt{10}} \leq \frac{20.5 - 20}{\sqrt{10}}\Big) \\ &= \Phi(\frac{0.5}{\sqrt{10}}) - \Phi(-\frac{0.5}{\sqrt{10}}) \approx 0.1272.\end{aligned}$$

2. Kliinilises katses anti 100-le inimesele väidetavalt kolesterooli alandavat rohtu. Rohi loetakse mõjuvaks, kui see aladab kolesterooli taset vähemalt 65-l inimesel. Leida tõenäosus, et rohi, mis tegelikult ei mõju, loetakse mõjusaks. Siinkohal arvestada, et kui rohi ei mõju, alaneb inimesel kolesteroolitase tõenäosusega 0.5.
Olgu X nende inimeste arv, kellel kolesteroolitase langes. Kui rohul mõju ei ole, siis $X \sim B(100, \frac{1}{2})$ ja otsitav tõenäosus:
$$\mathbf{P}(X \geq 65) = \sum_{i=65}^{100} C_{100}^{i}\big(\frac{1}{2}\big)^{100}.$$
Lähendades normaaljaotusega:
$$\mathbf{P}(X \geq 65) = \mathbf{P}(X \geq 64.5) = \mathbf{P}\Big(\frac{X - 50}{5} \geq 2.9\Big) \approx 1 - \Phi(2.9) \approx 0.0019.$$

3. Eksam koosneb n küsimusest. Tõenäosus, et tudeng vastab ühele küsimusele õigesti on 0.52. Eksam on sooritatud, kui tudeng vastab õigesti rohkem kui pooltele küsimustele. Leida tõenäosus, et tudeng sooritab eksami, kui eksam koosneb n küsimusest.
   Olgu X õigesti vastatud küsimuste arv, $X \sim B(n, 0.52)$. Meid huvitav tõenäosus on

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X > 0.5n) &= \mathbf{P}\big(\frac{X - 0.52n}{\sqrt{(0.52)(0.48)n}} > \frac{0.5n - 0.52n}{\sqrt{(0.52)(0.48)n}}\big) \\ &= \mathbf{P}\big(\frac{X - 0.52n}{\sqrt{(0.52)(0.48)n}} > -(0.04)\sqrt{n}\big) \\ &\approx \Phi\big((0.04)\sqrt{n}\big).\end{aligned}$$

   See tõenäosus kasvab koos n-ga (miks?). Kui $n = 11$, on see ligikaudu 0.5528, kui $n = 101$, on see ligikaudu 0.6562, kui $n = 1001$, on see ligikaudu 0.8973.

Kokkuvõtteks: Binoomjaotuse $B(n, p)$ tõenäosusi on suure n korral raske arvutada. Küll aga saab suure n korral binoomjaotust lähendada: 1) Poissoni jaotusega, kui $np(1-p)$ on väike (st kas p või $1-p$ on väike); 2) normaaljaotusega, kui $np(1-p)$ on suur. Siin "väike"ja "suur"pole defineertud, praktikas soovitatakse normaaljaotuse lähendit kasutada siis, kui $np(1-p) > 10$.

Peatükk 3

Juhuslikud vektorid

3.1 Juhusliku vektori jaotusfunktsioon

Sageli määratakse ühes katses mitme juhusliku suuruse väärtused (näiteks inimese pikkus ja kaal). Selliste olukordade matemaatiliseks modelleerimiseks on tõenäosusruumil $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ defineeritud kaks või enam juhuslikku suurust $X_1, \ldots, X_k$. Neid juhuslikke suurusi võib vaadelda vektorfunktsioonina

$$(X_1, \ldots, X_k) : \Omega \mapsto \mathbb{R}^k, \tag{3.1}$$

kus igale argumendile ω vastab k-dimensionaalne vektor. Kui $X_1, \ldots, X_k$ on juhuslikud suurused, siis vektorfunktsiooni (3.1) nimetatakse **juhuslikuks vektoriks**.

Näited: (juhuslik vektor)

1. Olgu urnis 3 punast, 4 valget ja 5 sinist palli. Juhuslikult võetakse 3 palli. Olgu X välja võetud punaste, Y välja võetud valgete ja Z välja võetud siniste pallide arv. Siis X, Y, Z on juhuslikud suurused, (X, Y, Z), (X, Y), (X, Z), (Y, Z) aga juhuslikud vektorid.

2. Visatagu münti n korda, X_i olgu i-nda viske tulemus (0 või 1). Siis $(X_1, \ldots, X_n)$ on juhuslik vektor.

3. Olgu $\Omega \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\Omega)$, $\mathbf{P} = \ell$. Seega $\omega = (\omega_1, \omega_2)$. Olgu $X(\omega) = \omega_1$, $Y(\omega) = \omega_2$. Siis (X, Y) on juhuslik vektor.

Juhusliku vektori kooral ei piisa mitmete huvipakkuvate sündmuste tõenäosuste arvutamiseks nende juhuslike suuruste jaotustest, vaid on vaja informatsiooni selle kohta, kuidas need juhuslikud suurused koos käituvad.

Definitsioon 3.1.1 *Juhusliku vektori* $(X_1, \ldots, X_k)$ **jaotusfunktsiooniks** *nimetatakse funktsiooni*

$$F(x_1, \ldots, x_k) = \mathbf{P}(X_1 \leq x_1, \ldots X_k \leq x_k), \quad x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots k.$$

Seega kahemõõtmelise juhusliku vektori (X, Y) jaotusfunktsioon, mida teinekord tähistatakse ka $F_{X,Y}$, kohal (x, y) on tõenäosus, et juhuslik suurus X on väiksem kui x ja Y on väiksem kui y:

$$F_{X,Y}(x, y) = \mathbf{P}(X \leq x, Y \leq y) = \mathbf{P}\big(\{\omega : X(\omega) \leq x, Y(\omega) \leq y\}\big).$$

Järgnevast lemmast järeldub, et juhusliku vektori jaotusfunktsioon on sarnane juhusliku suuruse jaotusfunktsiooniga.

Lemma 3.1.1 *(Juhusliku vektori jaotusfunktsiooni omadused). Olgu* $(X_1, \ldots, X_k)$ *juhuslik vektor jaotusfunktsiooniga* $F = F_{X_1,\ldots,X_k}$*. Siis kehtivad järgnevad omadused*

1. $0 \le F(x_1, \ldots, x_k) \le 1 \ \forall (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^n$,

2. F *on iga muutuja järgi mittekahanev ja paremalt pidev igas punktis,*

3.

$$\lim_{x_1\to\infty} F_{X_1,\ldots,X_k}(x_1, x_2, \ldots, x_k) = F_{X_2,\ldots,X_k}(x_2, \ldots, x_k) \quad \forall (x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^{k-1},$$
$$\lim_{x_2\to\infty} F_{X_1,\ldots,X_k}(x_1, x_2, \ldots, x_k) = F_{X_1,X_3\ldots,X_k}(x_2, \ldots, x_k) \quad \forall (x_1, x_3, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^{k-1},$$
$$\ldots$$
$$\lim_{x_k\to\infty} F_{X_1,\ldots,X_k}(x_1, x_2, \ldots, x_k) = F_{X_1\ldots,X_{k-1}}(x_1, \ldots, x_{k-1}) \quad \forall (x_1, \ldots, x_{k-1}) \in \mathbb{R}^{k-1},$$

4.

$$\lim_{x_i\to-\infty} F(x_1, \ldots, x_k) = 0 \quad \forall (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^{k-1},$$

Tõestus. Tõestus analoogiline lemma 3.13 tõestusega

1. Ilmne (miks?)

2. Näitame, et F on mittekahanev ja paremalt pidev x_1 järgi: fikseeritud $x_2, \ldots, x_n$ korral $x_1 \mapsto F(x_1, \ldots, x_k)$ on mittekahanev ja paremalt pidev. Olgu $x_2, \ldots, x_k$ fikseeritud ja $a_n \searrow a$. Veendu, et

$$\{X_1 \le a_n, X_2 \le x_2, \ldots, X_k \le x_k\} \supset \{X_1 \le a_{n+1}, X_2 \le x_2, \ldots, X_k \le x_k\} \supset \cdots$$
$$\cap_{n=1}^{\infty} \{X_1 \le a_n, X_2 \le x_2, \ldots, X_k \le x_k\} = \{X_1 \le a, X_2 \le x_2, \ldots, X_k \le x_k\}$$

ning kasuta tõenäosuse monotoonsust ja pidevust ülalt. Analoogiliselt veendu, et F mittekahanev ja paremalt pidev x_2, x_3 jne järgi.

3. Näitame, et

$$\lim_{x_1\to-\infty} F(x_1, \ldots, x_k) = 0 \ \forall (x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^{k-1}.$$

Tõestus ülejäänud argumentide korral sama.
Olgu $a_n \searrow -\infty$. Veendu, et iga $(x_2, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ korral

$$\cap_{n=1}^{\infty}\{X_1 \le a_n, X_2 \le x_2, \ldots, X_k \le x_k\} = \emptyset$$

ning kasuta tõenäosuse pidevust ülalt.

■

Olgu $(i_1, \ldots i_l)$ hulga $(1, \ldots, k)$ alamhulk. Omadusest 3. järeldub, et juhusliku vektori $(X_1, \ldots, X_n)$ jaotusfunktsioonist saab leida (ülejäänud komponentidega piirile minnes) vektori $(X_{i_1}, \ldots, X_{i_l})$ jaotusfunktsiooni. Muuhulgas saab vektori $(X_1, \ldots, X_n)$ jaotusfunktsioonist leida kõikide juhuslike suuruste X_i jaotusfunktsioone:

$$\lim_{x_1\to\infty} \cdots \lim_{x_{i-1}\to\infty} \lim_{x_{i+1}\to\infty} \cdots \lim_{x_k\to\infty} F(x_1, \ldots, x_k) = F_{X_i}(x_i) = \mathbf{P}(X_i \le x_i). \qquad (3.2)$$

Juhuslike suuruste X_i jaotusfinktsioone nimetatakse juhusliku vektori **marginaaljaotusfunktsioonideks (marginaaljaotusteks)**.

3.2 Pidevad ja diskreetsed juhuslikud vektorid

3.2.1 diskreetesed juhuslikd vektorid

Definitsioon 3.2.1 *Juhuslikku vektorit* $(X_1, \ldots, X_k)$ *nimetatakse* **diskreetseks**, *kui* $X_1, \ldots, X_k$ *on diskreetsed juhuslikud suurused.*

Olgu $\mathcal{X}_i$ juhusliku suuruse X_i väärtuste hulk (st $x \in \mathcal{X}_i$ parajasti siis, kui $\mathbf{P}(X = x) > 0$). Siis juhusliku vektori $(X_1, \ldots, X_k)$ väärtuste hulk sisaldub hulgas $\mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_k$. Kui juhuslikud suurused X_i on kõik diskreetsed, on hulgad $\mathcal{X}_i$ ülimalt loenduvad ning ka hulk $\mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_k$ on ülimalt loenduv. Seega diskreetsel juhuslikul vektoril on ülimalt loenduv arv võimalikke väärtusi, just nii nagu diskreetsel juhuslikul suuruselgi. Tuletame meelde, et diskreetse juhusliku suuruse jaotuseks nimetame paare: (väärtus, selle tõenäosus). Olgu nüüd $(x_1, \ldots, x_k) \in \mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_k$. Tema tõenäosust tähistame

$$p(x_1, \ldots, x_k) := \mathbf{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_k = x_k)$$

ning paarid

$$\{(x_1, \ldots, x_k), p(x_1, \ldots, x_k) : \quad (x_1, \ldots, x_k) \in \mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_k\}$$

moodustavad diskreetse juhusliku vektori jaotuse ehk juhuslike suuruste $X_1, \ldots, X_k$ **ühisjaotuse**. Paneme tähele, et mõne vektori $(x_1, \ldots, x_k)$ korral võib olla $p(x_1, \ldots, x_k) = 0$ kuigi $p(x_i) = \mathbf{P}(X_i = x_i) > 0$ iga i-korral.

Pane tähele: iga $i = 1, \ldots, k$ korral

$$\begin{aligned}
&\cup_{x_i \in \mathcal{X}_i} \{\omega : X_1(\omega) = x_1, \ldots, X_{i-1}(\omega) = x_{i-1}, X_i(\omega) = x_i, X_{i+1}(\omega) = x_{i+1}, \ldots, X_k(\omega) = x_k\} \\
&= \{\omega : X_1(\omega) = x_1, \ldots, X_{i-1}(\omega) = x_i, X_{i+1}(\omega) = x_{i+1}, \cdots X_k(\omega) = x_k\},
\end{aligned}$$

millest saame (kuidas?)

$$\begin{aligned}
\sum_{x_i \in \mathcal{X}_i} p(x_1, \ldots, x_k) &= \sum_{x_i \in \mathcal{X}_i} \mathbf{P}(X_1 = x_1, \cdots, X_{i-1} = x_{i-1}, X_i = x_i, X_{i+1} = x_{i+1}, \ldots, X_k = x_k) \\
&= \mathbf{P}(X_1 = x_1, \cdots, X_{i-1} = x_{i-1}, X_{i+1} = x_{i+1}, \ldots, , X_k = x_k).
\end{aligned}$$

Sellest järeldub, et iga alamhulga $I = \{i_1, \ldots, i_l\} \subset \{1, \ldots, k\}$ korral

$$\sum_{x_{i_1} \cdots x_{i_l}} p(x_1, \ldots, x_k) = \mathbf{P}(X_j = x_j, j \in J),$$

kus $J = \{1, \ldots, k\} \backslash I$.

Diskreetse juhusliku vektori funktsiooni keskväärtus Olgu $(X_1, \ldots, X_k)$ juhuslik vektor ja

$$g : \mathbb{R}^k \mapsto \mathbb{R}$$

funktsioon. Siis $g(X_1, \ldots, X_k)$ on diskreetne juhuslik suurus, mille väärtused on hulga

$$\big\{g(x_1, \ldots, x_k) : (x_1, \ldots, x_k) \in \mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_k\big\}$$

elemendid. Juhusliku suuruse $g(X_1, \ldots, X_k)$ keskväärtus, kui see eksisteerib, on

$$E\big(g(X_1, \ldots, X_k)\big) = \sum_{x_1 \cdots x_k} g(x_1, \ldots, x_k) p(x_1, \ldots, x_k). \tag{3.3}$$

Siin x_i summeeritakse üle $\mathcal{X}_i$. Võrdle valemiga (2.17).

Diskreetsete juhuslike suuruste X ja Y ühisjaotus. Kahedimensionaalse juhusliku diskreetse vektori (X, Y) korral esitatakse ühisjaotus tihti tabelina

$\mathcal{Y}\backslash\mathcal{X}$	x_1	x_2	$\cdots$	x_N	$p(y_i)$
y_1	$p(x_1, y_1)$	$p(x_2, y_1)$	$\cdots$	$p(x_N, y_1)$	$\sum_i p(x_i, y_1) = p(y_1)$
y_2	$p(x_1, y_2)$	$p(x_2, y_2)$	$\cdots$	$p(x_N, y_2)$	$\sum_i p(x_i, y_2) = p(y_2)$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
y_M	$p(x_1, y_M)$	$p(x_2, y_M)$	$\cdots$	$p(x_N, y_M)$	$\sum_i p(x_i, y_M) = p(y_M)$
$p(x_i)$	$\sum_i p(x_1, y_i) = p(x_1)$	$\sum_i p(x_2, y_i) = p(x_2)$	$\cdots$	$\sum_i p(x_N, y_i) = p(x_N)$	$\sum_{i,j} p(x_j, y_i) = 1$

Ülaltoodud tabelis juhusliku suuruse X väärtuste hulk on $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_N\}$, kus $N \leq \infty$; juhusliku suuruse Y väärtuste hulk on $\mathcal{Y} = \{y_1, \ldots, y_M\}$, kus $M \leq \infty$. Seega

$$p(x_i, y_j) = \mathbf{P}(X = x_i, Y = y_j)$$

ning iga i ja j korral

$$\sum_{i=1}^{N} p(x_i, y_j) = \mathbf{P}(Y = y_j) =: p(y_j), \quad \sum_{j=1}^{M} p(x_i, y_j) = \mathbf{P}(X = x_i) =: p(x_i).$$

Seega tabeli j-nda rea summa on $p(y_j)$ ja i-nda veeru summa summa on $p(x_i)$. Ülaltoodud tabelis võig olla, et $p(x_j, y_j) = 0$, kuid $p(x_i) > 0$ ja $p(y_j) > 0$. Teistpidi olla muidugi ei saa: kui $p(x_i) = 0$, siis $p(x_i, y_j) = 0$ iga j korral (miks?).

Näited: (diskreesete juhuslike suuruste ühisjaotus)

1. Olgu urnis 3 punast, 4 valget ja 5 sinist palli. Juhuslikult võetakse 3 palli. Olgu X välja võetud punaste, Y välja võetud valgete ja Z välja võetud siniste pallide arv. Siin $\mathcal{X} = \{0, 1, 2, 3\}$, $\mathcal{Y} = \{0, 1, 2, 3\}$, $\mathcal{Z} = \{0, 1, 2, 3\}$. Leiame vektori (X, Y) ühisjaotuse. Selle vektori võimalikus väärtused sisalduvad hulgas $\{0, 1, 2, 3\} \times \{0, 1, 2, 3\}$. Leiame tõenäosused

   $$p(i, j) = \mathbf{P}(X = i, Y = j), \quad i, j = 0, 1, 2, 3.$$

   Urni skeem, tagasipanekuta järjestamata komponentidega elementaarsündmused, seega

   $$p(i, j) = \begin{cases} \frac{C_3^i C_4^j C_5^{3-i-j}}{C_{12}^3}, & \text{kui } i + j \leq 3; \\ 0, & \text{mujal.} \end{cases}$$

   Et $C_{12}^3 = 220$, siis saame näiteks

   $$p(1, 1) = \frac{C_3^1 C_4^1 C_5^1}{220} = \frac{60}{220}.$$

   Leides kõik tõenäosused, same tabeli

$\mathcal{Y}\backslash\mathcal{X}$	0	1	2	3	$\mathbf{P}(Y = j)$
0	$\frac{10}{220}$	$\frac{30}{220}$	$\frac{15}{220}$	$\frac{1}{220}$	$\frac{56}{220}$
1	$\frac{40}{220}$	$\frac{60}{220}$	$\frac{12}{220}$	0	$\frac{112}{220}$
2	$\frac{30}{220}$	$\frac{18}{220}$	0	0	$\frac{48}{220}$
3	$\frac{4}{220}$	0	0	0	$\frac{4}{220}$
$\mathbf{P}(X = i)$	$\frac{84}{220}$	$\frac{108}{220}$	$\frac{27}{220}$	$\frac{1}{220}$	1

Ühisjaotuse tabelist saame ka X ja Y jaotuse. Näiteks $\mathbf{P}(X=2)=\frac{27}{220}$. Veendume, et see tõepoolest nii ka on:

$$\mathbf{P}(X=2)=\frac{C_3^2C_9^1}{220}=\frac{27}{220}.$$

2. Olgu $X_1,\ldots,X_k$ mündivisked, $X_i \sim B(1,p)$. Siis $\mathcal{X}_i=\{0,1\}$ ning

$$p(x_1,\ldots,x_k)=p^{\sum_i x_i}(1-p)^{1-\sum_i x_i}.$$

Seega (X_1,X_2) jaotustabel on

$\mathcal{X}_2\backslash\mathcal{X}_1$	0	1	$\mathbf{P}(X_2=j)$
0	$(1-p)^2$	$p(1-p)$	$(1-p)$
1	$p(1-p)$	p^2	p
$\mathbf{P}(X_1=i)$	$(1-p)$	p	1

Multinoomjaotus

Olgu katsel k võimalikku väärtust (väljundit), nende tõenäosused olgu vastavalt $p_1,\ldots,p_k$. Arusaadavalt $p_1+\cdots+p_k=1$. [Näiteks urnis on M kuuli, neist i-värvi kuule on M_i ($M_1+\cdots+M_k=M$) ja katse tulemus on väljavõetud kuuli värv. Siis $p_i=\frac{M_i}{M}$]. Oletame nüüd, et katset sooritati sõltumatult n korda. [Näiteks eelpoolkirjeldatud urnist võetakse tagasipanekuga n kuuli.] Siis tõenäosus, et i-s väljund toimus n_i korda, $i=1,\ldots k$ ($n_1+\cdots+n_k=n$) [näiteks i-ndat värvi juuli võeti n_i korda $i=1,\ldots k$] on vastavalt multinoomjaotuse valemile (1.23)

$$\frac{n!}{n_1!\cdots n_k!}p_1^{n_1}\cdots p_k^{n_k}.$$

Olgu $(X_1,\ldots,X_k)$ juhuslik vektor, kus X_i on i-nda väljundi arv. Siis ülaltoodud valemiga on antud vektori $(X_1,\ldots,X_k)$ ühisjaotus:

$$\mathbf{P}\big(X_1=n_1,\ldots,X_k=n_k\big)=\frac{n!}{n_1!\cdots n_k!}p_1^{n_1}\cdots p_k^{n_k}.$$

Definitsioon 3.2.2 *Juhuslik vektor* $(X_1,\ldots,X_k)$ *on* **multionoomjaotusega (multinomiaalse jaotusega))** *parameetritege* $n,p_1,\ldots,p_k$, *kus* $\sum_{i=1}^k p_i=1$, *kui suvaliste arvude* n_i, $i=1,\ldots,k$ *korral hulgast* $\{0,1,\ldots,n\}$ *kehtib võrdus*

$$\mathbf{P}(X_1=n_1,\ldots,X_k=n_k)=\begin{cases}\frac{n!}{n_1!\cdots n_k!}p_1^{n_1}\cdots p_k^{n_k}, & \textit{kui } \sum_{i=1}^k n_i=n,\\ 0 & \textit{vastasel korral.}\end{cases}$$

Pane tähele: kui $(X_1,\ldots,X_k)$ on multinoomjaotusega parameetritega $n,p_1,\ldots,p_k$, siis $X_i\sim B(n,p_i)$. Tõepoolest, X_i on i-nda väljundi arv n-l sõltumatul katsel. Ühel katsel on i-nda väljundi tõenäosus p_i. Analoogiliselt arutledes saame, et suvaliste indeksite $n_1,\cdots,n_l$ korral (veendu selles)

$$X_{i_1}+\cdots+X_{i_l}\sim B(n,p_{i_1}+\cdots+p_{i_l}).$$

Kui $k=2$, on multinoomjaotusega juhuslik vektor (X,Y) parameetritega n,p_1,p_2 sisuliselt binoomjaotusega, sest

$$\mathbf{P}(X=n_1,Y=n_2)=\mathbf{P}(X=n_1,Y=n-n_1)=C_n^{n_1}(p_1)^{n_1}(p_2)^{n-n_1}=\mathbf{P}(X=n_1).$$

Seega, kui $X \sim B(n,p)$, siis, defineerides $Y := n - X$ on (X,Y) multinoomjaotusega parameetritega $2, p, (1-p)$.

Näide: Olgu urnis üks must, kaks punast ja kolm valget kuuli. Katse seisneb juhusliku kuuli valikus, värvi kirjapanekus ning kuuli urni tagasi panekus. Katset korratakse kaks korda ning juhusliku suuruse X väärtuseks on saadud mustade kuulide arv, juhusliku suuruse Y väärtuseks on saadud valgete kuulide arv. Leime juhuslike suuruste X ja Y ühisjaotuse. Selleks paneme tähele, et kui Z on katses saadud punaste kuulide arv, siis (X,Y,Z) on mulinomiaalse jaotusega parameetritega $2, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$. Et

$$\mathbf{P}(X = x, Y = y) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x + y > 3, \\ \mathbf{P}(X = x, Y = y, Z = 2 - x - y), & \text{kui } x + y \leq 2, \end{cases}$$

siis juhusliku vektori (X,Y) jaotustabel on

$X\backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	0
2	$\frac{1}{36}$	0	0

Tõepoolest

$$\mathbf{P}(X = 0, Y = 0) = \frac{2!}{0!0!2!}\big(\frac{1}{6}\big)^0\big(\frac{1}{2}\big)^0\big(\frac{1}{3}\big)^2, \quad \mathbf{P}(X = 0, Y = 1) = \frac{2!}{0!1!1!}\big(\frac{1}{6}\big)^0\big(\frac{1}{2}\big)\big(\frac{1}{3}\big)$$

jne.
Marginaaljaotused on järgmised: $X \sim B(2, \frac{1}{6})$, $Y \sim B(2, \frac{1}{2})$, $Y \sim B(2, \frac{1}{3})$ Vastavalt valemile (3.3) saame

$$E(XY) = \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} i \cdot j \cdot p_{ij} = \frac{1}{6}.$$

3.2.2 Pidevad juhuslikud vektorid

Definitsioon 3.2.3 *Juhuslikku vektorit* $(X_1, \ldots, X_k)$ *nimetatakse* **pidevaks**, *kui leidub funktsioon*

$$f : \mathbb{R}^k \mapsto [0, \infty)$$

nii, et iga $(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ *korral avaldub vektori* $(X_1, \ldots, X_k)$ *jaotusfunktsioon kujul*

$$F(x_1, \ldots, x_k) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_k} f(u_1, \cdots, u_k)\, du_k \cdots du_1.$$

Funktsiooni f *nimetatakse sel juhul juhusliku vektori* $(X_1, \cdots, X_k)$ **tihedusfunktsiooniks**.

Tuleta meelde, et kordne integraal arvutatakse ükshaaval muutujate järgi integreerides:

$$\int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_k} f(u_1, \cdots, u_k)\, du_k \cdots du_1 = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_{k-1}} \Big(\int_{-\infty}^{x_k} f(u_1, \cdots, u_k) du_k\Big) du_{k-1} \cdots du_1.$$

Lemma 3.2.1 *(Tihedusfunktsiooni omadused) Olgu $(X_1, \ldots, X_k)$ pidev juhuslik vektor jaotusfunktsiooniga F ja tihedusfunktsiooniga f. Siis kehtivad järgmised omadused:*

1. *kehtivad võrdused*

$$f_{X_i}(x_i) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}}_{k-1} f(u_1, \ldots, u_k)\, du_k \cdots du_{i+1} du_{i-1} \cdots du_1,$$

kus $f_{X_i}(u_i)$ on juhusliku suuruse X_i tihedusfunktsioon.

2.
$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}}_{k} f(u_1, \ldots, u_k)\, du_k \cdots du_1 = 1$$

3. *Kui $D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$, siis*

$$\mathbf{P}\big((X_1, \ldots, X_k) \in D\big) = \int \cdots \int_D f(u_1, \ldots, u_k)\, du_1 \cdots du_k.$$

4. *Kui f on pidev punktis $(x_1, \cdots, x_k)$, siis*

$$f(x_1, \ldots, x_k) = \frac{\partial^k F}{\partial x_1 \cdots \partial x_k}(x_1 \cdots, x_k)$$

Tõestus.

1. Olgu

$$f_{X_i}(u) := \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(u_1, \ldots, u_{i-1}, u, u_{i+1}, \cdots, u_k)\, du_k \cdots du_{i+1} du_{i-1} \cdots du_1,$$

Veendume, et $f_{X_i}(u)$ on X_i tihedus, st

$$F_{X_i}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{X_i}(u) du.$$

Seos (3.2)

$$\begin{aligned}
F_{X_i}(x) &= \lim_{x_1 \to \infty} \cdots \lim_{x_{i-1} \to \infty} \lim_{x_{i+1} \to \infty} \cdots \lim_{x_k \to \infty} F(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_k) \\
&= \int_{-\infty}^{x} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(u_1, \ldots u_k)\, du_k \cdots du_{i+1} du_{i-1} \cdots du_1 \Big) du_i \\
&= \int_{-\infty}^{x} f_{X_i}(u_i) du_i.
\end{aligned}$$

2. järeldub eelmisest (kuidas?).

3. See järeldub tihedusfunktsioooni üldisest definitsioonist, millest räägime kursuses TNT2.

4. Mat analüüs (vt pidevad juhuslikud suurused).

■

Märkused:

- Seosest 1 järeldub, et kui $(X_1, \ldots, X_n)$ on pidev juhuslik vektor, siis marginaaljaotused (juhuslike suuruste X_i jaotused) on pidevad. Vastupidine üldiselt ei kehti: pidevad marginaaljaotused ei garanteeri juhusliku vektori pidevust. Olgu näiteks X pidev juhuslik suurus, $Y = X$. Siis (X, Y) on pidevate marginaalidega juhuslik vektor, kuid tal pole tihedust. Selles on lihtne veenduda. Olgu $D = \{(x, y) : x = y\}$ diagonaal. Vektori (X, Y) konstruktsioonist järeldub, et $\mathbf{P}\big((X, Y) \neq D\big) = 0$. Kui vektoril (X, Y) oleks tihedus $f(x, y)$, siis (seos 3)
$$\iint_{\mathbb{R}^2 \setminus D} f(x,y)dydx = \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\big(\int_{-\infty}^{x} + \int_{x}^{\infty} \big) f(x,y)dy \Big) dx = 0.$$
Et $f(x, y) \geq 0$, siis ülaltoodud võrdus saab kehtida vaid siis, kui iga x korral
$$\big(\int_{-\infty}^{x} + \int_{x}^{\infty} \big) f(x,y)dy = 0,$$
millest $f(x, y) = 0$, kui $x \neq y$. Seega f saab erineda 0-st ainult diagonaalil. Sellise funktsiooni integraal üle hulga $(-\infty, x] \times (-\infty, y]$ on aga 0, mitte $F(x, y)$. Järelikult f ei saa olla tihedus.

- Seosest 3 järeldub, et kui
$$D = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k,$$
kus A_i on Boreli hulgad, siis
$$\mathbf{P}\big((X_1, \ldots, X_k) \in D\big) = \mathbf{P}(X_1 \in A_1, \ldots, X_k \in A_k) = \int_{A_1} \cdots \int_{A_k} f(u_1, \ldots, u_k)du_k \cdots du_1.$$
Erijuhul, kui iga $i = 1, \ldots, k$ korral $A_i = (-\infty, x_i]$ saame ülaltoodud valemist
$$\begin{aligned} F(x_1, \ldots, x_k) &= \mathbf{P}(X_1 \leq x_1, \ldots, X_k \leq x_k) \\ &= \mathbf{P}(X_1 \in A_1, \ldots, X_k \in A_k) \\ &= \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_k} f(u_1, \ldots, u_k)du_k \cdots du_1. \end{aligned}$$

Näide: (pidev juhuslik vektor)

1. Olgu vektori (X, Y) ühistihedus
$$f(x,y) = \begin{cases} 2e^{-x}e^{2y}, & \text{kui } x > 0, y > 0; \\ 0, & \text{mujal.} \end{cases}$$
Leia X ja Y jaotus, $\mathbf{P}(X > 1, Y < 1)$ ja $\mathbf{P}(X < Y)$.
Leiame juhuslike suuruste X ja Y tihedusfunktsioonid:
$$f_X(x) = \int_0^{\infty} f(x,y)dy = 2e^{-x} \int_0^{\infty} e^{-2y}dy = e^{-x}$$
$$f_Y(y) = \int_0^{\infty} f(x,y)dx = 2e^{-2y} \int_0^{\infty} e^{-x}dx = 2e^{-2y}.$$

Seega marginaalid on eksponentjaotusega. Otsitavad tõenäosused leiame

$$\mathbf{P}(X > 1, Y < 1) = \int_0^1 \int_1^\infty 2e^{-x}e^{2y}dxdy = \int_0^1 2e^{-2y}\big(-e^{-x}|_1^\infty\big)dy = e^{-1}\int_0^1 2e^{-2y}dy = e^{-1}(1-e^{-2})$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X < Y) &= \iint_{(x,y):x>y} 2e^{-x}e^{2y}dxdy = \int_0^\infty \int_0^y 2e^{-x}e^{2y}dxdy = \int_0^\infty 2e^{-2y}(1-e^{-y})dy \\ &= \int_0^\infty 2e^{-2y}dy - \int_0^\infty 2e^{-3y}dy = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

2. Olgu vektori (X, Y) ühistihedus

$$f(x,y) = \begin{cases} xe^{-x(y+1)}, & \text{kui } x > 0, y > 0; \\ 0, & \text{mujal.}\end{cases}$$

Leia marginaaljaotused ja vektori (X, Y) jaotusfunktsioon.
Marginaaltihedused võib leida ühistihedusfunktsiooni $f(x, y)$ kaudu, kuid saab ka ühisjaotusfunktsioonist. Leiame selle.
Olgu

$$\begin{aligned}F(c,d) = \mathbf{P}(X \le c, Y \le d) &= \int_0^c \Big(\int_0^d xe^{-x(y+1)}dy\Big)dx = \int_0^c \Big(xe^{-x}\int_0^d e^{-xy}dy\Big)dx \\ &= \int_0^c \Big(xe^{-x}\big(\frac{1}{x} - \frac{e^{-xd}}{x}\big)\Big)dx = \int_0^c e^{-x}\big(1-e^{-xd}\big)dx = \int_0^c e^{-x}dx - \int_0^c e^{-x(d+1)}dx \\ &= 1 - e^{-c} + \frac{1}{d+1}(e^{-c(d+1)} - 1).\end{aligned}$$

Veendu, et

$$\frac{\partial^2}{\partial c \partial d}F(c,d) = ce^{-c(d+1)}.$$

Siit saame marginaalide jaotusfunktsioonid:

$$\begin{aligned}F_X(c) &= \lim_{d\to\infty}\Big[1 - e^{-c} + \frac{1}{d+1}(e^{-c(d+1)} - 1)\Big] = 1 - e^{-c}, \\ F_Y(d) &= \lim_{c\to\infty}\Big[1 - e^{-c} + \frac{1}{d+1}(e^{-c(d+1)} - 1)\Big] = 1 - \frac{1}{d+1}.\end{aligned}$$

Seega X on eksponentjaotusega (milline on tihedusfunktsioon) ja Y tihedusfunktsioon on järgmine (miks?):

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{(y+1)^2}, & \text{kui } y > 0; \\ 0, & \text{mujal.}\end{cases}$$

3. Olgu Ω ring tasandil raadiusega R, st $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2 : \omega_1^2 + \omega_2^2 \le R^2\}$, $\mathbf{P}$ olgu geomeetriline tõenäosus. See tähendab, et iga Boreli hulga $A \subset \Omega$ korral

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\ell(A)}{\ell(\Omega)} = \frac{\ell(A)}{\pi R^2},$$

kus ℓ on pindala. Olgu X ja Y järgmised juhuslikud suurused:

$$X(\omega) = X(\omega_1, \omega_2) = \omega_1, \quad Y(\omega) = Y(\omega_1, \omega_2) = \omega_2.$$

Seega X on juhuslikult ringi visatud punkti esimene koordinaat ja Y teine koordinaat. Teisisõnu, (X,Y) on samasusfunktsioon (ta teisendab punkti ω iseendaks). Veendume, et juhusliku punkti (X,Y) ühistihedus on järgmine:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi R^2}, & \text{kui } x^2+y^2 \le R^2; \\ 0, & \text{mujal.} \end{cases} \tag{3.4}$$

Seega

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi R^2} I_S(x,y),$$

kus S on ring raadiusega R (seega $S=\Omega$) ja I_S indikaatorfunktsioon.
Tõepoolest, iga tasandi (Boreli) hulga B korral

$$\{(X,Y)\in B\} = \{\omega : (X(\omega),Y(\omega))\in B\} = \{\omega : (\omega_1,\omega_2)\in B\}.$$

Seega

$$\mathbf{P}\big((X,Y)\in B\big) = \mathbf{P}\Big(\{\omega\in\Omega : (\omega_1,\omega_2)\in B\}\Big) = \mathbf{P}(\Omega\cap B) = \frac{\ell(\Omega\cap B)}{\pi R^2}$$
$$= \frac{\ell(S\cap B)}{\pi R^2} = \frac{1}{\pi R^2}\iint_{B\cap S} dxdy = \iint_B f(x,y)dxdy.$$

Tihedusega (3.15) antud jaotust nimetame **ühtlaseks jaotuseks ringil (raadiusega R)**. Kuigi juhuslik punkt (X,Y) on ühtlase jaotusega, pole koordinaadid X ja Y ühtlase jaotusega juhuslikud suurused, sest X tihedus f_X avaldub

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi R^2} I_S(y,x)dy = \frac{1}{\pi R^2}\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy = \frac{2\sqrt{R^2-x^2}}{\pi R^2}, \quad \text{kui } x^2 \le R^2.$$

Kui $x^2 > R^2$, siis $f_X(x)=0$. Sümmeetria tõttu Y tihedus sama.

Lemma 3.2.2 *Olgu $(X_1,\ldots,X_k)$ tihedusega f pidev juhuslik vektor ja $g : \mathbb{R}^k \mapsto \mathbb{R}$ selline funktsioon, et $g(X_1,\ldots,X_k)$ on juhuslik suurus, Kui*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} |g(x_1,\ldots,x_k)| f(x_1,\ldots,x_k)dx_k\cdots dx_1 < \infty,$$

siis juhuslikul surusel $g(X_1,\ldots,X_k)$ on lõplik keskväärtus, mis avaldub

$$Eg(X_1,\ldots,X_k) = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} g(x_1,\ldots,x_k) f(x_1,\ldots,x_k)dx_k\cdots dx_1. \tag{3.5}$$

Tõestus. Olgu esialgu g mittenegatiivne (st $g(x_1,\ldots,x_k)\ge 0$ iga $(x_1,\ldots,x_k)$ korral). Lemma 2.15:

$$E[g(X_1,\ldots,X_k)] = \int_0^{\infty} \mathbf{P}(g(X_1,\ldots,X_k) > t)dt.$$

Olgu

$$D(t) := \{(x_1,\ldots,x_k) : g(x_1,\ldots,x_k) > t\} \subset \mathbb{R}^k.$$

Siis (seos 3)

$$\mathbf{P}(g(X_1,\ldots,X_k)>t)=\int\cdots\int_{D(t)} f(x_1,\ldots,x_k)dx_k\cdots dx_1.$$

Seega

$$E[g(X_1,\ldots,X_k)]=\int_0^\infty\int\cdots\int_{D(t)} f(x_1,\ldots,x_k)dx_k\cdots dx_1 dt.$$

Vahetades integreerimisjärjekorra, saame

$$\begin{aligned}E[g(X_1,\ldots,X_k]&=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{g(x_1,\ldots,x_k)} dt f(x_1,\ldots,x_k)dx_k\cdots dx_1\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} g(x_1,\ldots,x_k)f(x_1,\ldots,x_k)dx_k\cdots dx_1.\end{aligned}$$

Kui g pole ilmtingimata mittenegatiivne, siis defineerime funktsioonid

$$g^+(x_1,\ldots,x_k):=\max\{g(x_1,\ldots,x_k),0\},\quad g^-(x_1,\ldots,x_k):=\max\{-g(x_1,\ldots,x_k),0\}$$

ja pane tähele, et $g=g^+-g^-$, millest

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x_1,\ldots,x_k)f(x_1,\ldots,x_k)dx_k\cdots dx_1=$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} g^+(x_1,\ldots,x_k)f(x_1,\ldots,x_k)dx_k\cdots dx_1-\int_{-\infty}^{\infty} g^-(x_1,\ldots,x_k)f(x_1,\ldots,x_k)dx_k\cdots dx_1.$$

Lemma 2.15:

$$\begin{aligned}E[g(X_1,\ldots,X_k)]&=\int_0^\infty \mathbf{P}(g(X_1,\ldots,X_k)>t)dt+\int_{-\infty}^0 \mathbf{P}(g(X_1,\ldots,X_k)\le t)dt\\&=\int_0^\infty \mathbf{P}(g(X_1,\ldots,X_k)>t)dt+\int_{-\infty}^0 \mathbf{P}(g(X_1,\ldots,X_k)<t)dt\\&=\int_0^\infty \mathbf{P}(g(X_1,\ldots,X_k)>t)dt+\int_0^\infty \mathbf{P}(-g(X_1,\ldots,X_k)>t)dt\\&=\int_0^\infty \mathbf{P}(g^+(X_1,\ldots,X_k)>t)dt+\int_0^\infty \mathbf{P}(g^-(X_1,\ldots,X_k)>t)dt\\&=\int_{-\infty}^\infty g^+(x_1,\ldots,x_k)f(x_1,\ldots,x_k)dx_k\cdots dx_1-\int_{-\infty}^\infty g^-(x_1,\ldots,x_k)f(x_1,\ldots,x_k)dx_k\cdots dx_1\\&=\int_{-\infty}^\infty g(x_1,\ldots,x_k)f(x_1,\ldots,x_k)dx_k\cdots dx_1.\end{aligned}$$

Siin teine võrdus tuleneb sellest, et funktsioonid

$$t\mapsto\mathbf{P}(g(X_1,\ldots,X_k)\le t)\text{ ja }t\mapsto\mathbf{P}(g(X_1,\ldots,X_k)<t)$$

erinevad vaid loenduvas arvus punktides ja integraal sellest ei muutu, neljas võrdus tuleb sellest, et iga $t\ge 0$ korral (veendu selles)

$$\{g(X_1,\ldots,X_k)>t\}=\{g^+(X_1,\ldots,X_k)>t\},\quad\{-g(X_1,\ldots,X_k)>t\}=\{g^-(X_1,\ldots,X_k)>t\}.$$

Viies võrdus tuleneb sellest, et nii g^+ kui ka g^- on mittenegatiivsed. ■

Lemmast 3.2.2 järeldub meile juba tuttav (aga siiani tõestamata) väide 2.2.2: pideva juhusliku X suuruse funktsiooni $g(X)$ keskväärtus (kui see leidub) on

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx,$$

kus f on X tihedus.

3.3 Sõltumatud ja sõltuvad juhuslikud suurused

3.3.1 Definitsioon

Tuleta meelde, et sündmused $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{F}$ on sõltumatud, kui iga alamhulga $A_{i_1}, \dots, A_{i_l}$ korral

$$\mathbf{P}(A_{i_1}, \dots, A_{i_l}) = \mathbf{P}(A_{i_1}) \cdots \mathbf{P}(A_{i_l}).$$

Veendu, et toodud definitsioon on ekvivalentne järgmisega: sündmused $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{F}$ on sõltumatud, kui iga $B_i \in \{A_i, \Omega\}$ korral

$$\mathbf{P}(B_1, \dots, B_k) = \mathbf{P}(B_1) \cdots \mathbf{P}(B_k) \tag{3.6}$$

Definitsioon 3.3.1 *Juhuslikud suurused $X_1, \dots, X_k$ on* **sõltumatud**, *kui iga $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $i = 1, \dots, k$ korral*

$$\mathbf{P}(X_1 \in B_1, \dots, X_k \in B_k) = \mathbf{P}(X_1 \in B_1) \cdots \mathbf{P}(X_k \in B_k). \tag{3.7}$$

Juhuslikud suurused on **sõltuvad**, *kui nad pole sõltumatud.*

Veendu, et kui $X_1, \dots, X_k$ on sõltumatud juhuslikud suurused, siis iga alamhulk $X_{i_1}, \dots, X_{i_l}$ on ka sõltumatud juhuslikud suurused. Võttes definitsioonis (3.7) $B_i = (-\infty, x_i]$ saame: kui $X_1, \dots, X_k$ on sõltumatud, siis iga $x_1, \dots, x_k$ korral

$$\mathbf{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_k \leq x_k) = \mathbf{P}(X_1 \leq x_1) \cdots \mathbf{P}(X_k \leq x_k). \tag{3.8}$$

Tähistades $F_{(X_1,\dots,X_k)}$ juhusliku vektori $(X_1, \dots, X_k)$ jaotusfunktsiooni, saame (3.8) kujul

$$F_{(X_1,\dots,X_k)}(x_1, \dots, x_k) = F_{X_1}(x_1) \cdots F_{X_k}(x_k). \tag{3.9}$$

Seega, kui $X_1, \dots, X_k$ on sõltumatud, siis iga $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ korral kehtib (3.9). Saab näidata, et kehtib vastupidine: (3.9) on piisav sõltumatuseks.

Lemma 3.3.1 *Juhuslikud suurused $X_1, \dots, X_k$ on sõltumatud parajasti siis, kui iga $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ korral kehtib (3.9).*

Tõestus. TNT2 Järeldus 5.3 ■

Lemma 3.3.2 *Olgu $X_1, \dots, X_k$ sõltumatud juhuslikud suurused. Olgu iga $i = 1, \dots, k$ korral*

$$g_i : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$$

selline funktsioon, et $g_i(X_i)$ on juhuslik suurus. Siis

$$g_1(X_1), \dots, g_k(X_k)$$

on ka sõltumatud juhuslikud suurused.

Tõestus. Olgu $B_1, \ldots, B_k$ suvalised Boreli hulgad. Defineeri iga $i = 1, \ldots, k$ korral

$$A_i := \{x \in \mathbb{R} : g(x) \in B_i\}.$$

Saab näidata, et kui B_i on Boreli hulk, siis on seda ka A_i. Seega $x \in A_i$ parajasti siis, kui $g_i(x) \in B_i$, millest saame, et iga i korral

$$\{\omega : g_i(X(\omega)) \in B_i\} = \{\omega : X_i(\omega) \in A_i\}.$$

Võttes ülaltoodud hulkade ühisosa üle i-de, saame

$$\{\omega : g_1(X_1(\omega)) \in B_1, \ldots, g_k(X_k(\omega)) \in B_k\} = \{\omega : X_1(\omega) \in A_1, \ldots, X_k(\omega) \in A_k\}.$$

Järelikult

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\big(g_1(X_1) \in B_1, \ldots, g_k(X_k) \in B_k\big) &= \mathbf{P}(X_1 \in A_1, \ldots, X_k \in A_k) \\
&= \mathbf{P}(X_1 \in A_1) \cdots \mathbf{P}(X_k \in A_k) \\
&= \mathbf{P}\big(g_1(X_1) \in B_1\big) \cdots \mathbf{P}\big(g(X_k) \in B_k\big).
\end{aligned}$$

Siin teine võrdus tuleb sellest, et X_i-d on sõltumatud, esimene ja kolmas aga A_i definitsioonist. ■

Lemmast järeldub muuhulgas, et kui X ja Y on sõltumatud, siis on seda ka paarid X^2, Y^2; X^3, e^Y.

Teoreem 3.3.2 *Olgu $X_1, \ldots, X_k$ lõpliku keskäärtusega sõltumatud juhuslikud suurused. Siis on ka juhuslikul suurusel*

$$X_1 \cdot X_2 \cdots X_k$$

on lõplik keskväärtus, kusjuures

$$E[X_1 \cdots X_k] = EX_1 \cdots EX_k. \tag{3.10}$$

Tõestus. Üldiselt tõestame teoreemi kursuses TNT2 (vt TNT2 Trm 8.16). Erijuhul pidevate ja diskreetsete juhuslike suuruste korral tõestame allpool. ■

Järeldus 3.3.1 *Olgu $X_1, \ldots, X_k$ sõltumatud juhuslikud suurused. Olgu iga $i = 1, \ldots, k$ korral*

$$g_i : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$$

selline funktsioon, et $g_i(X_i)$ on lõpliku keskväärtusega juhuslik suurus. Siis juhuslikul suurusel

$$\prod_{i=1}^{k} g_i(X_i)$$

on ka lõplik keskväärtus ning

$$E[g_1(X_1) \cdots g_k(X_k)] = Eg_1(X_1) \cdots Eg_k(X_k). \tag{3.11}$$

NB! Kui juhuslikus suurused $X_1, \ldots, X_k$ pole sõltumatud, siis (3.10) üldiselt ei kehti. Kontranäiteks võta $Y \sim B(1, \frac{1}{2})$ ja $Y := X$. Veendu, et $E(XY) = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{4} = EXEY$.

3.3.2 Diskreetsete juhuslike suuruste sõltumatus

Olgu $X_1, \ldots, X_k$ on sõltumatud diskreetsed juhuslikud suurused. Siis seosest (3.7) järeldub, et suvaliste reaalarvude $x_1, \ldots, x_k$ korral

$$\mathbf{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_k = x_k) = \mathbf{P}(X_1 = x_1) \cdots \mathbf{P}(X_k = x_k). \tag{3.12}$$

Seega, kui $(X_1, \ldots, X_k)$ on sõltumatute komponentidega juhuslik vektor, siis iga selle juhusliku vektori väärtuse $(x_1, \ldots, x_k)$ tõenäosus on marginaaltõenäosuste korrutis. On lihtne veenduda, et (3.12) on piisav sõltumatuseks.

Väide 3.3.1 *Diskreetsed juhuslikud suurused $X_1, \ldots, X_k$ on sõltumatud parajasti siis, kui suvaliste reaalarvude $x_1, \ldots, x_k$ korral kehtib (3.12).*

Tõestus. Tarvilikkus on tõestatud. Tõestame piisavuse. Olgu $X_1, \ldots, X_k$ sellised juhuslikud suurused, et suvaliste reaalarvude $x_1, \ldots, x_k$ korral kehtib (3.12). Olgu $\mathcal{X}_i$ juhusliku suuruse X_i võimalike väärtuste hulk. Seega $\mathcal{X}_i$ on ülimalt loenduv iga i korral. Olgu $B_1, \ldots B_k$ suvalised Boreli hulgad. Siis

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X_1 \in B_1, \ldots, X_k \in B_k) &= \sum_{(x_1,\ldots,x_k) \in (\mathcal{X}_1 \cap B_1) \times \cdots \times (\mathcal{X}_k \cap B_k)} \mathbf{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_k = x_k) \\
&= \sum_{(x_1,\ldots,x_k) \in (\mathcal{X}_1 \cap B_1) \times \cdots \times (\mathcal{X}_k \cap B_k)} \mathbf{P}(X_1 = x_1) \cdots \mathbf{P}(X_k = x_k) \\
&= \sum_{x_1 \in (\mathcal{X}_1 \cap B_1)} \cdots \sum_{x_k \in (\mathcal{X}_k \cap B_k)} \mathbf{P}(X_1 = x_1) \cdots \mathbf{P}(X_k = x_k) \\
&= \Big(\sum_{x_1 \in \mathcal{X}_1 \cap B_1} \mathbf{P}(X_1 = x_1) \Big) \cdots \Big(\sum_{x_k \in (\mathcal{X}_k \cap B_k)} \mathbf{P}(X_k = x_k) \Big) \\
&= \mathbf{P}(X_1 \in B_1) \cdots \mathbf{P}(X_k \in B_k).
\end{aligned}$$

■

Seega kaks diskreetset juhuslikku suurust X ja Y on sõltumatud parajasti siis, kui iga $x \in \mathcal{X}$ ja $y \in \mathcal{Y}$ korral $\mathbf{P}(X = x, Y = y) = \mathbf{P}(X = x)\mathbf{P}(Y = y)$. Teisisõnu, iga jaotustabeli element on vastavate marginaaltõenäosuste (rea ja veeru summa) korrutis:

$\mathcal{Y} \backslash \mathcal{X}$	x_1	x_2	$\cdots$	x_N	$p(y_i)$
y_1	$p(x_1)p(y_1)$	$p(x_2)p(y_1)$	$\cdots$	$p(x_N)p(y_1)$	$p(y_1)$
y_2	$p(x_1)p(y_2)$	$p(x_2)p(y_2)$	$\cdots$	$p(x_N)p(y_2)$	$p(y_2)$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
y_M	$p(x_1)p(y_M)$	$p(x_2)p(y_M)$	$\cdots$	$p(x_N)p(y_M)$	$p(y_M)$
$p(x_i)$	$p(x_1)$	$p(x_2)$	$\cdots$	$p(x_N)$	1

Tõestame seose (3.10) diskreetsete juhuslike suuruste korral. Olgu $X_1, \ldots, X_k$ sõltumatud diskreetsed juhuslikud suurused, X_i väärtuste hulk olgu $\mathcal{X}_i$. Seega iga $(x_1, \ldots, x_k) \in \mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_k$ korral (sõltumatus)

$$p(x_1, \ldots, x_k) = p_1(x_1) \cdots p_k(x_k),$$

kus $p_i(x_i) := \mathbf{P}(X_i = x_i)$ ja $p(x_1, \ldots, x_k) := \mathbf{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_k = x_k)$. . Valemist (3.3) saame (x_i summeritakse üle $\mathcal{X}_i$)

$$\begin{aligned} E[X_1 \cdots X_k] &= \sum_{x_1,\ldots,x_k} (x_1 \cdots x_k) p(x_1, \ldots, x_k) \\ &= \sum_{x_1,\ldots,x_k} (x_1 \cdots x_k) p_1(x_1) \cdots p_k(x_k) \\ &= \sum_{x_1} \cdots \sum_{x_k} (x_1 \cdots x_k) p_1(x_1) \cdots p_k(x_k) \\ &= \sum_{x_1} x_1 p_1(x_1) \cdots \sum_{x_k} x_k p_k(x_k) \\ &= EX_1 \cdots EX_k \end{aligned}$$

3.3.3 Pidevate juhuslike suuruste sõltumatus

Olgu $X_1, \ldots, X_k$ on pidevad juhuslikud suurused. Siis suvaliste reaalarvude $x_1, \ldots, x_k$ korral $\mathbf{P}(X_1 = x_1) \cdots \mathbf{P}(X_k = x_k) = 0$ ja $\mathbf{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_k = x_k) = 0$. Seega (3.12) kehtib. Et $X_1, \ldots, X_k$ võivad olla suvalised, et järeldu sellest muidugi sõltumatus.

Väide 3.3.2 *Pidevad juhuslikud suurused $X_1, \ldots, X_k$ on sõltumatud parajasti siis, kui vektor $(X_1, \ldots, X_k)$ on pidev ja tema ühistihedus on marginaaltiheduste korrutis:*

$$f_{(X_1,\ldots,X_k)}(x_1, \ldots, x_k) = f_{X_1}(x_1) \cdots f_{X_k}(x_k) \tag{3.13}$$

Tõestus. Olgu $X_1, \ldots, X_k$ on sõltumatud ja F olgu $(X_1, \ldots, X_k)$ jaotusfunktsioon. Siis iga $x_1, \ldots, x_k$ korral

$$\begin{aligned} F(x_1, \ldots, x_k) &= F_{X_1}(x_1) \cdots F_{X_k}(x_k) \\ &= \int_{-\infty}^{x_1} f_{X_1}(u_1) du_1 \cdots \int_{-\infty}^{x_k} f_{X_k}(u_k) du_k \\ &= \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_k} f_{X_1}(u_1) \cdots f_{X_k}(u_k) du_k \cdots du_1 \\ &= \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_k} f(u_1, \ldots, u_k) du_k \cdots du_1, \end{aligned}$$

kus

$$f(u_1, \ldots, u_k) := f_{X_1}(u_1) \cdots f_{X_k}(u_k).$$

Seega

$$f_{X_1}(u_1) \cdots f_{X_k}(u_k)$$

on $(X_1, \ldots, X_k)$ tihedus.
Olgu $(X_1, \ldots, X_k)$ tihedus $f_{X_1}(u_1) \cdots f_{X_k}(u_k)$. Ülaltoodud arutlusest järeldub, et iga $x_1, \ldots, x_k$ korral

$$F(x_1, \ldots, x_k) = F_{X_1}(x_1) \cdots F_{X_k}(x_k),$$

seega juhuslikud suurused $X_1, \ldots, X_k$ on sõltumatud. ■

Näide: (sõltumatud pidevad juhuslikud suurused) Vaatle punktis 3.2.2 toodud kolme näidet. Veendu, et esimeses näites vaadeldud juhuslikud suurused X ja Y on sõltumatud, kuid teises ja kolmandas näites vaadeldud juhuslikud suurused ei ole.

Tõestame seose (3.10) pidevate juhuslike suuruste korral. Olgu $X_1, \dots, X_k$ sõltumatud pidevad juhuslikud suurused, X_i tihedus olgu f_i. Seega iga $(x_1, \dots, x_k)$ korral vektori $(X_1, \dots, X_k)$ ühistihedus, olgu see $f(x_1, \dots, x_k)$ on (sõltumatus)

$$f(x_1, \dots, x_k) = f_1(x_1) \cdots f_k(x_k),$$

Valemist (3.5) saame

$$\begin{aligned} E[X_1 \cdots X_k] &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 \cdots x_k) f(x_1, \dots, x_k) dx_k \cdots dx_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 \cdots x_k) f_1(x_1) \cdots f_k(x_k) dx_k \cdots dx_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_1(x_1) dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} x_k f_k(x_k) dx_k \\ &= EX_1 \cdots EX_k \end{aligned}$$

3.4 Juhusliku vektori kovariatsioonimaatriks

Olgu X ja Y kaks sõltuvat juhuslikku suurust. Sõltuvus tähendab (definitsiooni kohaselt), et X ja Y pole sõltuvad. Samas võib sõltuvus olla väga tugev (näiteks $X = Y$) või ka suhteliselt nõrk. Juhuslike suuruste omavahelise sõltuvuse mõõtmiseks on väga palju võimalusi, neist vast enimkasutatvam on lineaarset sõltuvust mõõtev korrelatsioonikordaja.

Definitsioon 3.4.1 *Olgu X ja Y lõplikku dispersiooni omavad juhuslikud suurused. Siis nende* **kovaratsiooniks** *nimetatakse suurust*

$$\mathrm{cov}(X, Y) = E[(X - EX)(Y - EY)]$$

ning **korrelatsioonikordajaks** *nimetatakse arvu*

$$\rho(X, Y) = \frac{\mathrm{cov}(X, Y)}{\sqrt{DX\,DY}}.$$

Teoreem 3.4.2 *(***Cauchy-Schwartz-Bunjakowski võrratus***) Olgu X ja Y lõpliku dispersiooniga juhuslikud suurused. Siis*

$$[E(XY)]^2 \leq EX^2 EY^2, \tag{3.14}$$

kusjuures ülaltoodud võrratus on võrdus parjasti siis, kui leidub konstant a nii, et $\mathbf{P}(aX = Y) = 1$.

Tõestus. Kõigepealt pane tähele, et kui $EX^2 = 0$, siis $\mathbf{P}(X = 0) = 1$ (miks?), millest järeldub, et $\mathbf{P}(XY = 0) = 1$ ja $E(XY) = 0$. Seega, kui $EX^2 = 0$ või kui $EY^2 = 0$, siis (3.14) kehtib. Vaatame nüüd olukorda, kus $EX^2 > 0$ ja $EY^2 > 0$. Olgu $a \in \mathbb{R}$, ning defineerime $Z = aX - Y$. Seega

$$0 \leq EZ^2 = E(aX - Y)^2 = a^2 EX^2 - 2aE(XY) + EY^2.$$

Seega ruutfunktsioonil

$$a \mapsto a^2 EX^2 - 2aE(XY) + EY^2$$

on maksimaalselt üks null-koht (miks?). See tähendab, et selle ruutfunktsiooni diskriminant peab olema mittepositiivne:

$$4E(XY)^2 - 4EX^2EY^2 = 4(E(XY)^2 - EX^2EY^2) \leq 0.$$

See tähendab, et kehtib (3.14). Ruutvormi diskriminant on 0 parjasti siis kui sellel ruutvormil on 1 null-koht ehk mingi $EZ^2 = 0$. Viimane kehtib vaid siis, kui $\mathbf{P}(Z = 0) = 1$ või samaväärselt, $\mathbf{P}(aX - Y = 0) = 1$. ■

Lemma 3.4.1 *Olgu X, Y ja Z lõplikku dispersiooni omavad juhuslikud suurused. Siis kehtivad valemid*

1. $\mathrm{cov}(X, X) = DX$ *ja* $\rho(X, X) = 1$*;*
2. $\mathrm{cov}(X, Y) = E(XY) - EX \cdot EY$*;*
3. *kui X ja Y on sõltumatud, siis* $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$ *ja* $\rho(X, Y) = 0$*;*
4. $D(X + Y) = DX + DY + 2\mathrm{cov}(X, Y)$
5. *kui $X_1, \ldots, X_k$ on juhuslikud suurused, siis*
$$D(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} DX_i + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} \mathrm{cov}(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{cov}(X_i, X_j);$$
6. *kui $X_1, \ldots, X_k$ on sõltumatud juhuslikud suurused, siis*
$$D(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} DX_i.$$
7. $\mathrm{cov}(X, Y) = \mathrm{cov}(Y, X)$*;*
8. $\mathrm{cov}(\alpha X + \beta Y, Z) = \alpha\, \mathrm{cov}(X, Z) + \beta\, \mathrm{cov}(Y, Z) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$*;*
9. $|\rho(X, Y)| \leq 1$, *kusjuures võrdus kehtib parajasti siis leiduvad arvud a ja b nii, et*
$$\mathbf{P}(Y = aX + b) = 1;$$
10. $\rho\big((\alpha X + \beta), Y\big) = \rho(X, Y) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Tõestus.

1. Ilmne (miks?).
2. $$\begin{aligned} E(X - EX)(Y - EY) &= E[XY - Y(EX) - X(EY) + (EX)(EY)] \\ &= E(XY) - (EY)(EX) + (EX)(EY) - (EX)(EY) \\ &= E(XY) - EXEY. \end{aligned}$$

3.

$$
\begin{aligned}
E[(X+Y)-E(X+Y)]^2 &= E[(X+Y)-(EX+EY)]^2\\
&= E[(X-EX)+(Y-EY)]^2\\
&= E[(X-EX)^2+(Y-EY)^2+2E[(X-EX)(Y-EY)]\\
&= DX+DY+2\mathrm{cov}(X,Y).
\end{aligned}
$$

4. Tõestus sama, sest suvaliste reaalarvude $a_1, \dots, a_n$ korral

$$
(a_1+\cdots+a_n)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} a_i a_j.
$$

   Teine võrdus tuleb kovariatsiooni sümmeetrilisusest ja sellest, et $D(X_i) = \mathrm{cov}(X_i, X_i)$.

5. Seosed 6 ja 3

6. Ilmne.

7. Seos 2 ja keskväärtuse linearsus:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{cov}(\alpha X+\beta Y, Z) &= E[(\alpha X+\beta Y)Z] - E((\alpha X+\beta Y)EZ\\
&= \alpha E(XZ) + \beta E(YZ) - \alpha EXEZ - \beta EYEZ\\
&= \alpha[E(XZ) - EXEZ] + \beta[E(XY) - EXEY]\\
&= \alpha\mathrm{cov}(X,Z) + \beta\mathrm{cov}(Y,Z).
\end{aligned}
$$

8. Seos (3.10).

9. Võrratus (3.14):

$$
|\mathrm{cov}(X,Y)| = |E[(X-EX)(Y-EY)]| \le \sqrt{E(X-EX)^2E(Y-EY)^2}.
$$

   Seega $|\rho(X,Y)| \le 0$. Oletame, et $\rho(X,Y) = 1$ ehk

$$
E[(X-EX)(Y-EY)]| = \sqrt{E(X-EX)^2E(Y-EY)^2}.
$$

   Vastavalt teoreemile 3.4.2 ülaltoodud võrdus kehtib vaid siis, kui leidub $a \in \mathbb{R}$ nii, et

$$
\mathbf{P}\Big(a(X-EX) = Y-EY\Big) = \mathbf{P}(Y = aX - aEX + EY) = 1.
$$

10. Ülesanne.

■

Sõltumatute juhuslike suuruste summa dispersioon on seega juhuslike suuruste dispersioonide summa.

Näited: (sõltumatute juhuslike suuruste summa dispersioon)

1. Teame, et kui $X \sim B(n,p)$, siis $DX = np(1-p)$. Teisalt, binoomjaotusega juhuslik suurus in n sõltumatu Bernoulli jaotusega juhusliku suuruse summa: kui $X = \sum_{i=1}^n X_i$, kus $X_1, \ldots, X_n$ on sõltumatud $B(1,p)$ jaotusega juhuslikud suurused, siis $X \sim B(n,p)$. Seega $DX = D(X_1 + \cdots + X_n) = DX_1 + \cdots + DX_n = np(1-p)$, sest Bernoulli jaotusega juhusliku suuruse dispersioon on $p(1-p)$.

2. Negatiivse binoomjaotusega juhuslik suurus on r sõltumatu geomeetrilise jaotusega juhusliku suuruse summa: kui $X_1, \ldots, X_r$ on sõltumatud juhuslikud suurused, $X_i \sim G(p)$ ja $X = \sum_{i=1}^r X_i$, siis $X \sim NegB(r,p)$. Seega
$$DX = rDX_1 = r\frac{(1-p)}{p^2},$$
sest $DX_i = \frac{(1-p)}{p^2}$.

3. Olgu $X_1, \ldots, X_n$ sõltumatud juhuslikud suurused, kusjuures $EX_i = \mu$ ja $DX_i = \sigma^2$. Leiame nende juhuslike suuruste keskmise keskväärtuse ja dispersiooni. Keskväärtuse lineaarsus
$$E[\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}] = \frac{n\mu}{n} = \mu.$$
Dispersioon
$$D[\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}] = \frac{1}{n^2}D(X_1 + \cdots + X_n) = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Seos 3 väidav, et sõltumatute juhuslike suuruste kovariatsioon on 0. Vastupidine üldiselt ei kehti: kovariatsioon võib olla 0 ka siis, kui juhuslikud suurused on sõltuvad.

Näited: (mittekorreleeritud kuid sõltuvad juhuslikud suurused)

1. Olgu (X,Y) jaotustabel järgmine:

$Y \backslash X$	-1	0	1
0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0

   Veendu, et X ja Y on sõltuvad, $E(XY) = 0$ ja $EX = 0$. Seega $\mathrm{cov}(X,Y) = 0$.

2. Olgu (X,Y) ühtlase jaotusega ringil raadiusega R, st ühistihedus on
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi R^2}, & \text{kui } x^2 + y^2 \leq R^2; \\ 0, & \text{mujal.} \end{cases} \tag{3.15}$$
   Veendu, et $EX = EY = EXY = 0$, kuid X ja Y pole sõltumatud.

Definitsioon 3.4.3 *Juhusliku vektori $X = (X_1, \ldots, X_k)$ keskväärtus on vektor*
$$EX = \begin{pmatrix} EX_1 \\ EX_2 \\ \cdots \\ EX_l \end{pmatrix}.$$

Juhusliku vektori $X = (X_1, \ldots, X_k)$ **kovariatsioonimaatriks** *on maatriks*

$$\begin{pmatrix} D(X_1) & \mathrm{cov}(X_1,X_2) & \mathrm{cov}(X_1,X_3) & \cdots & \mathrm{cov}(X_1,X_k) \\ \mathrm{cov}(X_2,X_1) & D(X_2) & \mathrm{cov}(X_2,X_3) & \cdots & \mathrm{cov}(X_2,X_k) \\ \mathrm{cov}(X_3,X_1) & \mathrm{cov}(X_3,X_2) & D(X_3) & \cdots & \mathrm{cov}(X_3,X_k) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathrm{cov}(X_k,X_1) & \mathrm{cov}(X_k,X_2) & \mathrm{cov}(X_k,X_3) & \cdots & D(X_k) \end{pmatrix}$$

Juhusliku vektori $X = (X_1, \ldots, X_k)$ **korrelatsioonimaatriks** *on maatriks*

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho(X_1,X_2) & \rho(X_1,X_3) & \cdots & \rho(X_1,X_k) \\ \rho(X_2,X_1) & 1 & \rho(X_2,X_3) & \cdots & \rho(X_2,X_k) \\ \rho(X_3,X_1) & \rho(X_3,X_2) & 1 & \cdots & \rho(X_3,X_k) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho(X_k,X_1) & \rho(X_k,X_2) & \rho(X_k,X_3) & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Seega kovariatsioonimaatriksi (korrelatsioonimaatriksi) i-nda rea ja j-nda veeru element on $\mathrm{cov}(X_i, X_j)$ $(\rho(X_i, X_j))$. Neil maatrikseil on järgmised omadused:

1. Kovariatsioonimaatriks ja korrelatsioonimaatriks on sümmeetrilised.
2. Kui vektori $(X_1, \ldots, X_k)$ komponendid on sõltumatud, on kovariatsioonimaatriks diagonaalmaatriks ja korrelatsioonimatriks ühikmaatriks.
3. Kui Σ on vektori $(X_1, \ldots, X_k)$ kovariatsioonimaatriks ja

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_k \end{pmatrix}$$

on suvaline k-dimensionaalne juhuslik vektor, siis

$$a'\Sigma a = (a_1, \ldots, a_k) \begin{pmatrix} D(X_1) & \mathrm{cov}(X_1,X_2) & \cdots & \mathrm{cov}(X_1,X_k) \\ \mathrm{cov}(X_2,X_1) & D(X_2) & \cdots & \mathrm{cov}(X_2,X_k) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathrm{cov}(X_k,X_1) & \mathrm{cov}(X_k,X_3) & \cdots & D(X_k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_k \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} a_i a_j \mathrm{cov}(X_i, X_j) = D(a_1X_1 + \cdots + a_kX_k) \geq 0.$$

Siin viimane võrdus tuleb kovariatsiooni omadustest 5 ja 8 [millest $\mathrm{cov}(a_iX_i, a_jX_j) = a_ia_j\mathrm{cov}(X_i, X_j)$]. Seega kovariatsioonimaatriks on positiivselt poolmääratud.

Näide: (juhusliku vektori kovariatsioonimaatriks)

Olgu juhusliku vektori (X, Y) jaotustabel

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	0
2	$\frac{1}{36}$	0	0

Eelpool leidsime, et $X \sim B(2, \frac{1}{6})$, $Y \sim B(2, \frac{1}{2})$ ja

$$E(XY) = \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} i \cdot j \cdot p_{ij} = \frac{1}{6}.$$

Seega $EX = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ ja $EY = \frac{2}{2} = 1$, millest

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E(XY) - EXEY = \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}.$$

Samuti $DX = \frac{1}{3}\frac{5}{6} = \frac{5}{18}$ ning $DY = \frac{1}{2}$ Selle vektori keskväärtus ja kovariatsioonimaatriks on järelikult

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ja } \begin{pmatrix} \frac{5}{18} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Leiame $D(X-Y)$. Selleks kasutame kovariatsioonimaatriksit:

$$D(X-Y) = (1,-1)\begin{pmatrix} \frac{5}{18} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{5}{18} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{13}{9}.$$

3.5 Mitmemõõtmeline normaaljaotus

Definitsioon 3.5.1 *Juhuslik vektor $X = (X_1, \ldots, X_k)$ on* **mitmemõõtmelise normaaljaotusega** *kui tema tihedusfunktsioon on kujul*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi^k|\Sigma|}} \exp[-\frac{1}{2}(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)],$$

kus $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$, $\mu \in \mathbb{R}^k$ ja Σ on $k \times k$ sümmeetriline positiivsel poolmääratud maatriks. Vektor μ ja maatriks Σ on mitmemõõtmelise normaaljaotuse parameetrid ja nende parameetritega mitmemõõtmelist normaaljaotust tähistatakse $N(\mu, \Sigma)$.

Näide: (kahemõõtmeline normaaljaotus) Vaatleme kahemõõtmelist juhtu. Olgu $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ ja

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{pmatrix}.$$

Siis

$$\Sigma^{-1} = \frac{1}{\sigma_x^2\sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2}\begin{pmatrix} \sigma_y^2 & -\sigma_{xy} \\ -\sigma_{xy} & \sigma_x^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{1-\rho^2}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_x^2} & -\frac{\rho}{\sigma_x\sigma_y} \\ -\frac{\rho}{\sigma_x\sigma_y} & \frac{1}{\sigma_y^2} \end{pmatrix},$$

kus $\rho = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}$- Seega kahemõõtmelise normaaljaotuse tihedusfunktsioon on

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_y^2}\right)\right]. \tag{3.16}$$

Mitmemõõtmelise normaaljaotuse omadused. Olgu $(X_1, \ldots, X_k) \sim N(\mu, \Sigma)$, kus

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1k} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{k1} & \sigma_{k2} & \cdots & \sigma_k^2 \end{pmatrix}.$$

Kehtivad järgmised omadused:

1. $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i)$ (keskväärtusega μ_i ja dispersiooniga σ_i^2 normaaljaotus). Seega vektor μ on mitmemõõtmelise normaaljaotusega juhusliku vektori keskväärtus (miks?)

2. Maatriks Σ on vektori $(X_1, \ldots, X_k)$ kovariatsioonimaatriks. Seega $\sigma_{ij} = \mathrm{cov}(X_i, X_j)$ ja ρ valemis (3.16) on korrelatsioonikordaja.

3. Kui Σ on diagonaalmaatriks, siis avaldub tihedus $f(x_1, \ldots, x_k)$ marginaaltiheduste korrutisena (veendu selles). Seega, kui Σ on diagonaalmaatriks (kovariatsioonid on 0), on juhuslikud suuruse $X_1, \ldots, X_k$ on sõltumatud. Teisest küljest, kui $X_1, \ldots, X_k$ on sõltumatud normaaljaotusega (mitte ilmtingimata samade parameetritega) juhuslikud suurused, on nende ühistihedus marginaaltiheduste korrutis. See aga, nagu just veendusime, on mitmemõõtmelise normaaljaotuse tihedus. Seega

   (a) Sõltumatud normaaljaotusega juhuslikud suurused moodustvad mitmemõõtmelise normaaljaotusega vektori (kovariatsioonimaatriks on diagonaalne);

   (b) mitmemõõtmelise normaaljaotuse komponendid on sõltumatud parajasti siis, kui nende kovariatsioon on 0.

4. Olgu D $l \times k$-maatriks astakuga $l \leq k$ ning olgu $Y = (Y_1, \ldots, Y_l)$ juhuslik vektor, mis on saadud vektorist X maatriksiga D korrutamisel, st $Y = X'D$. Siis $Y \sim N(\mu D, D'\Sigma D)$. Sellest järeldub muuhulgas:

   (a) Suvalise vektori $d = (d_1, \ldots, d_k) \in \mathbb{R}^k$ korral lineaarkombinatsioon $d_1X_1 + \cdots d_kX_k$ on normaaljaotusega keskväärtusega $\mu'd = \mu_1d_1 + \cdots + \mu_kd_k$ ja dispersiooniga $d'\Sigma d$ (miks?).

   (b) Suvalise alamhulga $\{i_1, \ldots, i_l\} \subset \{1, \ldots, k\}$ korral vektor $(X_{i_1}, \ldots, X_{i_l})$ on ka mitmemõõtmelise normaaljaotusega (miks?). Näiteks kui vektor (X, Y) on kahemõõtmelise normaaljaotusega, siis juhuslikud suurused $X - Y$, $X + Y$, $3X - \frac{1}{2}Y$ on normaaljaotusega.

NB! Ülaltoodud omadused kehtivad vaid mitmemõõtmelise normaaljaotuse korral. Seega, kui X ja Y on normaaljaotusega, ei järeldu sellest, et $aX + bY$ on normaaljaotusega. Samuti, teades, et $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$ ei järeldu sellest, et X ja Y on sõltumatud. Toodud väited järelduvad vaid siis, kui on teada, et (X, Y) on kahemõõtmelise normaaljaotusega.

Kontranäide: Olgu $Z \sim N(0, 1)$, $R \sim B(1, \frac{1}{2})$-jaotusega juhuslik suurus, Z, R olgu sõltumatud. Defineerime juhusliku vektori (X, Y) järgmiselt

$$(X, Y) = \begin{cases} (Z, Z), & \text{kui } R = 1; \\ (Z, -Z), & \text{kui } R = 0. \end{cases}$$

Veendu, et $X \sim N(0,1)$ ja $Y \sim N(0,1)$. Veendu, et $\mathbf{P}(X - Y = 0) = 0.5$, seega $X - Y$ pole normaaljaotusega. Pole raske näidata, et $EXY = 0$. Seega $\operatorname{cov}(X, Y) = 0$. Veendu, et X ja Y pole sõltumatud. Vektor (X, Y) pole pidev juhuslik vektor (miks?), mistõttu ei saa ta olla kahemõõtmelise normaaljaotusega.