TARTU ÜLIKOOL
Matemaatilise statistika instituut

Martingaalid

Loegukonspekt

2006 kevad

Kalev Pärna

J. Liivi 2, 50409 Tartu,
Email: Kalev.Parna@ut.ee

Käesolev loengukonspekt annab ülevaate martingaalidest ja nende kasutamisest finantsmatemaatikas. Eeldatakse mõõduteoorial põhineva tõenäosusteooria kursuse (TN II) eelnevat omandamist. Alustatakse tingliku keskväärtuse mõistega, misjärel käsitletakse diskreetse ajaga martingaale. Seejärel minnakse üle pideva ajaga martingaalide juurde, kus vaadeldakse ka Browni liikumist. Selgitatakse stohhastilise integraali mõistet ning Ito valemit. Teooriat rakendatakse optsioonide hindamise juures, kus käsitletakse klassikalist Black-Scholes'i mudelit.

Käesolev loengukonspekt põhineb peamiselt järgmistel allikatel:
D. Williams. *Probability with Martingales.* Cambridge University Press, 1995.
A. Etheridge.*A Course in Financial Calculus.* Cambridge University Press, 2004.
D. Lamperton, B. Lapeyre. *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance.* Chapman & Hall, 1996.

1 Tinglik keskväärtus

1.1 Tinglik keskväärtus diskreetse juhusliku suuruse suhtes

Olgu antud tõenäosusruum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ning sellel kaks diskreetset juhuslikku suurust X ja Z , millede võimalikud väärtused on vastavalt $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ja $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Elementaarsest tõenäosusteooriast on tuntud tinglik tõenäosus

$$\mathbf{P}(X = x_i | Z = z_j) = \frac{\mathbf{P}(X = x_i, Z = z_j)}{\mathbf{P}(Z = z_j)}$$

ja samuti X tinglik keskväärtus sündmuse $\{Z = z_j\}$ suhtes:

$$E(X | Z = z_j) = \sum x_i \mathbf{P}(X = x_i | Z = z_j).$$

Juhusliku suuruse X tinglikuks keskväärtuseks Z suhtes nimetatakse juhuslikku suurust $Y = E(X|Z)$, mis on defineeritud võrdusega

$$\text{kui } \ Z(\omega) = z_j, \ \text{siis } Y(\omega) = E(X | Z = z_j) := y_j.$$

On kasulik vaadata tinglikule keskväärtusele järgmisest vaatepunktist. Juhuslik suurus Z indutseerib σ-algebra $\mathcal{G} = \sigma(Z)$, mis koosneb hulkadest kujul[1] $\{Z \in B\}$, $B \in \mathcal{B}$, kus $\mathcal{B}$ on Boreli σ-algebra. Et Z on antud juhul diskreetne, siis iga hulk $\{Z \in B\}$ on mingite G_j-de ühend ja $\mathcal{G} = \sigma(Z)$ koosneb hulkade G_j kõikvõimalikest ühenditest (neid on kokku 2^n tükki, sh tühihulk $\emptyset$). Kuna tinglik keskväärtus Y on (sarnaselt Z-ga) konstantne hulkadel G_j, siis iga $B \in \mathcal{B}$ korral ka $Y^{-1}(B) \in \mathcal{G}$ ehk

$$Y \quad \text{on} \quad \mathcal{G} - \text{mõõtuv}. \tag{1}$$

Arvestades, et Y võtab hulgal G_j konstantse väärtuse y_j, saame

$$\begin{aligned} \int_{G_j} Y d\mathbf{P} &= y_j \mathbf{P}(Z = z_j) = \sum_i x_i \mathbf{P}(X = x_i | Z = z_j) \mathbf{P}(Z = z_j) \\ &= \sum_i x_i \mathbf{P}(X = x_i, Z = z_j) = \int_{G_j} X d\mathbf{P}. \end{aligned}$$

Kuna iga $G \in \mathcal{G}$ on teatavate G_j-de ühend, siis summeerides vastavad integraalid, saame võrduse

$$\int_G Y d\mathbf{P} = \int_G X d\mathbf{P}, \quad \forall G \in \mathcal{G}. \tag{2}$$

Omadused (1) ja (2) on aluseks tingliku keskväärtuse üldisele definitsioonile.

[1] Tähistuse $\{Z \in B\}$ all mõistame hulka $\{\omega : Z(\omega) \in B\} := Z^{-1}(B)$, s.o. Boreli hulga B originaali.

1.2 Tinglik keskväärtus

Teoreem 1. (Kolmogorov, 1933) *Olgu* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *tõenäosusruum ning* X *sellel määratud juhuslik suurus,* $\mathbf{E}(|X|) < \infty$. *Olgu* $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ *alam-*σ*-algebra. Siis leidub juhuslik suurus* Y*, et*

(a) Y *on* $\mathcal{G}$*-mõõtuv,*

(b) $\mathbf{E}(|Y|) < \infty$,

(c) $\int_G Y d\mathbf{P} = \int_G X d\mathbf{P}, \quad \forall G \in \mathcal{G}$.

Kui $\tilde{Y}$ *on mõni teine samu nõudeid rahuldav juhuslik suurus, siis* $\tilde{Y} = Y$ *p.k. ehk* $\mathbf{P}(\tilde{Y} = Y) = 1$. *Tingimusi (a)–(c) rahuldavat juhuslikku suurust* Y *nimetatakse* X *tinglikuks keskväärtuseks* σ*-algebra* $\mathcal{G}$ *suhtes ja kirjutatakse* $Y = \mathbf{E}(X|\mathcal{G})$ *p.k.*

Märkus. Tingimusi (a)–(c) rahuldavaid juhuslikke suurusi nimetatakse ka tingliku keskväärtuse $\mathbf{E}(X|\mathcal{G})$ *versioonideks.* Ülalöeldu põhjal kõik versioonid on omavahel paarikaupa p.k. võrdsed.

Tähistus. Kui $\mathcal{G} = \sigma(Z)$, siis $\mathbf{E}[X|\sigma(Z)]$ asemel kirjutatakse sageli $\mathbf{E}(X|Z)$.

Teoreemi 1. tõestus. Kasutame Radon-Nikodymi teoreemi: Kui μ ja ν on σ-lõplikud mõõdud ning $\nu \ll \mu$, siis leidub mittenegatiivne funktsioon f (*tihedus*), mille korral $\nu(A) = \int_A f d\mu$ iga $A \in \mathcal{F}$. Kui g on teine selline tihedus, siis $\mu\{f \neq g\} = 0$.
Oletame esmalt, et $X \geq 0$. Tähistame $\nu(G) := \int_G X d\mathbf{P}, G \in \mathcal{G}$. Siis $\nu \ll \mathbf{P}$ ja R-N teoreemi järgi leidub ($\mathcal{G}$-mõõtuv) funktsioon $Y \geq 0$, et $\int_G Y d\mathbf{P} = \nu(G) \equiv \int_A Y d\mathbf{P}$. Kui X võib olla ka negatiivne, siis kasutame lahutust $X = X^+ - X^-$ ja rakendame R-N teoreemi mõlema osa kohta eraldi, saades Y^+ ja Y^- ning defineerides seejärel $Y = Y^+ - Y^-$. $\square$

Tingliku keskväärtuse tõlgendus. Sooritati juhuslik katse. Meie ainus informatsioon katsetulemuse ω kohta on see, et iga sündmuse $G \in \mathcal{G}$ kohta teame, kas ta toimus või mitte. Siis $Y(\omega) = \mathbf{E}(X|\mathcal{G})(\omega)$ on X keskväärtus selle info korral. Kui $\mathcal{G}$ on triviaalne σ-algebra $\{\emptyset, \Omega\}$, mis ei sisalda mingit informatsiooni (on ette teada, et neist esimene ei toimu kunagi, teine aga toimub alati), siis $\mathbf{E}(X|\mathcal{G})(\omega) = \mathbf{E}(X)$ kõigi ω korral.

Tinglik keskväärtus kui X parim $\mathcal{G}$-mõõtuv prognoos.
Kui $\mathbf{E}(X^2) < \infty$, siis $Y = \mathbf{E}(X|\mathcal{G})$ on X ortogonaalne projektsioon ruumile $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P})$. Teisiti öeldes, Y minimiseerib avaldise $\mathbf{E}(X-Y)^2$ üle kõigi $\mathcal{G}$-mõõtuvate (info G põhjal arvutatavate) prognooside.

1.3 Tingliku keskväärtuse omadused

Eeldame, et $\mathbf{E}(|X|) < \infty$ ning et $\mathcal{G}$ ja $\mathcal{H}$ on $\mathcal{F}$ alam-σ-algebrad, $\mathcal{G}, \mathcal{H} \subset \mathcal{F}$.

(a) Kui Y on $\mathbf{E}(X|\mathcal{G})$ versioon, siis $\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(X)$.

(b) Kui X on $\mathcal{G}$-mõõtuv, siis $\mathbf{E}(X|\mathcal{G}) = X$ p.k.

(c) **(Lineaarsus)** $\mathbf{E}(a_1X_1 + a_2X_2|\mathcal{G}) = a_1\mathbf{E}(X_1|\mathcal{G}) + a_2\mathbf{E}(X_2|\mathcal{G})$ p.k.

(d) **(Positiivsus)** Kui $X \geq 0$, siis $\mathbf{E}(X|\mathcal{G}) \geq 0$ p.k.

(e) **(tMon)** Kui $0 \leq X_n \uparrow X$, siis $\mathbf{E}(X_n|\mathcal{G}) \uparrow \mathbf{E}(X|\mathcal{G})$ p.k.

(f) **(tFatou)** Kui $X_n \geq 0$, siis $\mathbf{E}(\liminf X_n|\mathcal{G}) \leq \liminf E(X|\mathcal{G})$ p.k.

(g) **(tDom)** Kui $|X_n(\omega)| \leq V(\omega), \forall n,\quad \mathbf{E}V < \infty$ ja $X_n \to X$ p.k., siis

$$E(X_n|\mathcal{G}) \to E(X|\mathcal{G}) \text{ p.k.}$$

(h) **(tJensen)** Kui $c : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ on kumer funktsioon ja $\mathbf{E}|c(X)| < \infty$, siis

$$\mathbf{E}[c(X)|\mathcal{G}] \geq c(\mathbf{E}[X|\mathcal{G}]) \text{ p.k.}$$

Järeldus: $\|\mathbf{E}(X|\mathcal{G})\|_p \geq \|X\|_p$ p.k.

(i) **(Torni omadus)** Kui $\mathcal{H}$ on $\mathcal{G}$ alam-σ-algebra, siis

$$\mathbf{E}[\mathbf{E}(X|\mathcal{G})|\mathcal{H}] = \mathbf{E}[X|\mathcal{H}] \text{ p.k.}$$

(j) **(Toome välja, mis on teada)** Kui Z on $\mathcal{G}$-mõõtuv ja tõkestatud, siis

$$\mathbf{E}(ZX|\mathcal{G}) = Z\mathbf{E}(X|\mathcal{G}) \text{ p.k.}$$

(k) **(Sõltumatus)** Kui $\mathcal{H}$ on sõltumatu σ-algebrast $\sigma(\sigma(X), \mathcal{G})$, siis

$$\mathbf{E}[X|\sigma(\mathcal{G}, \mathcal{H})] = \mathbf{E}[X|\mathcal{G}] \text{ p.k.}$$

Erijuhul, kui X on sõltumatu $\mathcal{H}$-st, siis $\mathbf{E}(X|\mathcal{H}) = \mathbf{E}(X)$ p.k.

1.4 Tingliku keskväärtuse omaduste tõestus

Tõestused põhinevad tingliku keskväärtuse definitsioonil ning tavalise keskväärtuse (integraali) vastavatel omadustel.

Omadused (a)–(c) jätame lugeja tõestada.

Omadus (d). Olgu $X \geq 0$ ja $Y = \mathbf{E}(X|\mathcal{G})$. Oletame vastuväiteliselt, et $\mathbf{P}(Y < 0) > 0$. Siis leidub n, et hulk $G = \{Y < -1/n\}$ on positiivse tõenäosusega, mistõttu

$$0 \leq \mathbf{E}(X;G) = \mathbf{E}(Y;G) < -\frac{1}{n}P(G) < 0.$$

Vastuolu. $\square$
Omadus (e). Olgu $Y_n = \mathbf{E}(X_n|\mathcal{G})$. Siis TK positiivsuse tõttu kehtib $0 \leq Y_1 \leq Y_2 \leq \ldots$. Defineerime $Y = \limsup Y_n$. Siis Y on $\mathcal{G}$-mõõtuv ja $Y_n \uparrow Y$ p.k.. Näitame, et $Y = \mathbf{E}(X|\mathcal{G})$. Selleks rakendame võrduse

$$\mathbf{E}(Y_n;G) = \mathbf{E}(X_n;G),\ G \in \mathcal{G}$$

mõlemale poolele [2] monotoonse koondumise teoreemi. Tulemuseks saame $\mathbf{E}(Y;G) = \mathbf{E}(X;G),\ \forall G \in \mathcal{G}$. $\square$

Omadus (f). Tähistame

$$Y_n = \inf_{m \geq n} X_n,\quad Y = \lim_{n\to\infty} Y_n \equiv \liminf X_n.$$

Siis $Y_n \uparrow Y$ ning omaduse (e) tõttu $\mathbf{E}(Y_n|\mathcal{G}) \uparrow \mathbf{E}(Y|\mathcal{G})$. Seega

$$\mathbf{E}(\liminf X_n|\mathcal{G}) = \mathbf{E}(Y|\mathcal{G}) = \liminf E(Y_n|\mathcal{G}) \leq \liminf \mathbf{E}(X_n|\mathcal{G}) \text{ p.k.}$$

kus võrratus tuleneb TK positiivsuse omadusest. $\square$

Omadus (g). Rakendame omadust (f) jadade $X_n + V$ ja $V - X_n$ jaoks.
Omadus (h).
Omadus (i) järeldub vahetult definitsioonist.
Omadus (j).

[2] $\mathbf{E}(Y_n;G)$ on integraali $\int_G Y_n d\mathbf{P}$ lühendatud tähistus

2 Martingaalid

2.1 Filtreeritud ruum ja kohandatud protsess

Olgu antud tõenäosusruum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Definitsioon 1. Filtratsiooniks *nim. kasvavat alam-σ-algebrate jada $\{\mathcal{F}_n, n \geq 0\}$, mille korral*

$$\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1, \ldots \subseteq \mathcal{F}.$$

Tähistame

$$\mathcal{F}_\infty := \sigma\left(\bigcup_n \mathcal{F}_n\right) \subseteq \mathcal{F}.$$

Filtratsiooni mõiste abil väljendatakse ajas kasvava informatsiooni ideed. Ajahetkel n on ω kohta teada ainult kõigi $\mathcal{F}_n$-mõõtuvate funktsioonide väärtused $Z(\omega)$. Tavaliselt $\{\mathcal{F}_n\}$ on *naturaalne filtratsioon*

$$\mathcal{F}_n = \sigma(W_0, W_1, \ldots, W_n),$$

kus $\{W_n\}$ on mingi juhuslik protsess. Siis on ω kohta ajahetkel n teada selle protsessi senine ajalugu

$$W_0(\omega), W_1(\omega), \ldots, W_n(\omega)$$

(mis üldiselt ei määra ω üheselt).

Definitsioon 2. *Öeldakse, et juhuslik protsess $X = (X_n : n \geq 0)$ on* kohandatud *filtratsioonile $\{\mathcal{F}_n\}$, kui iga n korral X_n on $\mathcal{F}_n$ -mõõtuv.*

Tõlgendus. Kui protsess X on kohandatud, siis tema väärtus $X(\omega)$ on ajahetkel n teada. Tüüpiliselt $\mathcal{F}_n = \sigma(W_0, W_1, \ldots, W_n)$ ja $X_n = f_n(W_0, W_1, \ldots, W_n)$.

2.2 Martingaal, supermartingaal, submartingaal

Definitsioon 3. *Juhuslikku protsessi X nimetatakse* martingaaliks *($\{\mathcal{F}_n\}$ suhtes), kui*

1. *X on kohandatud,*
2. *$\mathbf{E}|X_n| < \infty$,*
3. *$\mathbf{E}(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) = X_{n-1}$ p.k. $(n \geq 1)$.*

Supermartingaali korral nõutakse viimase võrduse asemel võrratust

$$\mathbf{E}(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) \leq X_{n-1} \quad \text{p.k.} \quad (n \geq 1)$$

ja *submartingaali* korral

$$\mathbf{E}(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) \geq X_{n-1} \quad \text{p.k.} \quad (n \geq 1).$$

Supermartingaal kahaneb (keskmiselt) ajas, submartingaal aga kasvab ajas. Eeldades, et $X_0 \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, on X martingaal parajasti siis, kui seda on $X - X_0$. Sama kehtib supermartingaali ja submartingaali kohta. Seega võime vajaduse korral lihtsuse mõttes lugeda, et $X_0 = 0$.

Torni omadust kasutades saame supermartingaali jaoks ka järgmise võrratuse: $\forall m < n$ korral

$$\mathbf{E}(X_n|\mathcal{F}_m) = \mathbf{E}(X_n|\mathcal{F}_{n-1}|\mathcal{F}_m) \leq \mathbf{E}(X_{n-1}|\mathcal{F}_m) \leq \ldots \leq X_m \quad \text{p.k.}$$

2.3 Näiteid martingaalide kohta

Näide 1. Null-keskväärtusega juhuslike suuruste summa
Olgu $X_1, X_2, \ldots$ sõltumatute juhuslike suuruste jada, mille korral $\mathbf{E}|X_k| < \infty$, $\forall k$ ning

$$\mathbf{E}X_k = 0, \ \forall k.$$

Defineerime $S_0 = 0$, $\quad \mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ ja

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \ n \geq 1, , \quad \mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n), \ n \geq 1.$$

Siis protsess $S = (S_n : n \geq 0)$ on filtratsiooni $\{\mathcal{F}_n\}$ suhtes martingaal (näidata!).

Näide 2. Keskväärtusega 1 mittenegatiivsete juhuslike suuruste korrutis
Olgu $X_1, X_2, \ldots$ sõltumatute juhuslike suuruste jada, kusjuures $X_k \geq 0$ ja

$$\mathbf{E}X_k = 1, \ \forall k.$$

Defineerime $M_0 = 1$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ ning

$$M_n = \prod_{i=1}^{n} X_i, \quad \mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

Siis protsess $X = (X_n : n \geq 0)$ on filtratsiooni $\{\mathcal{F}_n\}$ suhtes martingaal (näidata!).

Näide 3. Informatsiooni kogunemine juhusliku suuruse kohta
Olgu antud filtratsioon $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$ ning juhuslik suurus $\xi \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Defineerime $M_n = \mathbf{E}(\xi \mid \mathcal{F}_n)$. Juhuslik suurus M_n on lähtesuuruse ξ "jäme" (s.o. $\mathcal{G}$-mõõtuv) versioon, mis n kasvades muutub üha täpsemaks. Näidata, et protsess $M = (M_n : n \geq 0)$ on martingaal.

2.4 Õiglane mäng, ebaõiglane mäng

Olgu $X_n - X_{n-1}$ Sinu võidu suurus ühikulise panuse kohta mängus n ($n \geq 1$). Lihtsaks näiteks on täringuvisete seeria, kus k-ndal viskel on tulemuseks $\Delta_k = +1$ või $\Delta_k = -1$ ning $X_n = \sum_{k=1}^{n} \Delta_k$.

Martingaali korral
(a) $\mathbf{E}(X_n - X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}) = 0$, (mäng on õiglane)
ja supermartingaali korral
(b) $\mathbf{E}(X_n - X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}) \leq 0$, (mäng on Sinu jaoks ebasoodus).

Märgime, et sümmeetrilise täringu korral realiseerub variant (a), kui aga -1 on tõenäosem kui $+1$, siis kehtib (b).

2.5 Ennustatav protsess, mängustrateegia

Definitsioon 4. *Protsessi $C = (C_n : n \geq 1)$ nimetatakse* **ennustatavaks** [3]*, kui C_n on $\mathcal{F}_{n-1}$-mõõtuv iga $n \geq 1$ korral.*

Tõlgendus (hasartmängu strateegia). Olgu C_n – mängija panus mängus n. Mängija otsustab C_n väärtuse mängu ajaloo põhjal kuni hetkeni $n-1$, seega C_n on $\mathcal{F}_{n-1}$-mõõtuv ehk protsess C on 'ennustatav'. Olgu $X_n - X_{n-1}$ võidu suurus ühikulise panuse kohta mängus n. Koguvõit pärast mängu n avaldub sel juhul kujul

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} C_i(X_i - X_{i-1}) =: (C \bullet X)_n. \tag{3}$$

Märgime, et $Y_0 = (C \bullet X)_0 := 0$ ning $Y_n - Y_{n-1} = C_n(X_n - X_{n-1})$.

Protsessi $C \bullet X$ nimetatakse protsessi X martingaalteisenduseks C abil. See on diskreetseks analoogiks nn. stohhastilisele integraalile $\int C\, dX$, millega tutvume hiljem.

Teoreem 2. (Süsteemi ei saa lüüa!) *Kui C on tõkestatud ($|C_n| \leq K < \infty, \forall n$) ennustatav protsess ning X on martingaal, siis ka $C \bullet X$ on martingaal. Kui C on tõkestatud ja mittenegatiivne ning X on supermartingaal, siis ka $C \bullet X$ on supermartingaal.*

Märkus. Eelneva teoreemi mõlemad väited jäävad kehtima, kui C tõkestatus asendada tingimusega, et $\mathbf{E}|C_n(X_n - X_{n-1})| < \infty$, $\forall n \geq 1$.

<u>Tõestus.</u> Olgu C tõkestatud ja ennustatav ning X kohandatud. Olgu $Y = C \bullet X$. Siis tingliku keskväärtuse omaduse 10 abil saame

$$\mathbf{E}[Y_n - Y_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}] = \mathbf{E}[C_n(X_n - X_{n-1}) \mid \mathcal{F}_{n-1}] = C_n\mathbf{E}[X_n - X_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}]. \tag{4}$$

[3] Sobiv vaste on ka **ettenähtav** protsess (ingl.k. 'predictible','previsible').

Kui X on martingaal, siis $\mathbf{E}(X_n - X_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}) = 0$, seega võrduse (4) põhjal on ka $C \bullet X$ martingaal. Kui $C_n \geq 0$ ja X on supermartingaal, siis võrdusest (4) järeldub, et

$$\mathbf{E}[Y_n - Y_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}] \leq 0,$$

seega $C \bullet X$ on samuti supermartingaal. □

2.6 Peatumishetk

Definitsioon 5. *Funktsiooni* $T : \Omega \to \{0, 1, \ldots ; \infty\}$ *nimetatakse* **peatumishetkeks**, *kui*

$$\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n \quad \forall n \in \{0, 1, \ldots, \infty\}$$

või, ekvivalentselt,

$$\{T = n\} \in \mathcal{F}_n \quad \forall n \in \{0, 1, \ldots, \infty\}.$$

Ülesanne. Näidata, et ülaltoodud tingimused on ekvivalentsed.
Näide. Olgu A mingi kohandatud protsess ning B mingi Boreli hulk. Siis

$$T = inf\{n : A_n \in B\}$$

on peatumishetk. Kokkuleppeliselt $inf\{\emptyset\} = \infty$. Seega $T = \infty$ tähendab, et protsess A ei jõua kunagi hulka B.

2.7 Peatatud martingaalid

Olgu X supermartingaal ($X_0 = 0$) ja olgu T peatumishetk. Näiteks $T = \inf\{n : Y_n \geq 10\}$ ehk mängija lõpetab niipea, kui tema koguvõit on vähemalt 10. Oletame, et mängija panus on alati 1 ning ta lahkub mängust vahetult peale mängu T. Siis tema 'panuse protsess' C^T on järgmine:

$$C_n^T(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{kui } n \leq T(\omega); \\ 0, & \text{muul juhul.} \end{cases}$$

Mängija 'võiduprotsess' võtab siis ajahetkel n kuju

$$(C^T \bullet X)_n = X_{T \wedge n} - X_0 = X_{T \wedge n}.$$

Et panuste protsess C^T on tõkestatud, mittenegatiivne ja ennustatav (viimane omadus tuleneb asjaolust, et $\forall n \quad \{C_n^T = 0\} = \{T \leq n-1\} \in \mathcal{F}_{n-1}$), siis teoreemi 2 põhjal $X_{T \wedge n}$ on supermartingaal. Kui aga X oleks olnud martingaal, siis oleks seda ka $X_{T \wedge n}$.

Protsessi $X^T := (X_{T \wedge n} : n \geq 0)$ nimetatakse ***peatatud protsessiks.*** Oleme tõestanud järgmise teoreemi.

Teoreem 3. *Kui X on supermartingaal (martingaal) ja T on peatumishetk, siis ka* **peatatud protsess** $X^T = (X_{T \wedge n} : n \geq 0)$ *on supermartingaal (martingaal).*

2.8 Doob'i peatumisteoreem

Oluline on teada, kas martingaali omadus $\mathbf{E}X_n = \mathbf{E}X_0$ kehtib ka siis, kui n asemel on peatumishetk T. Vahe on selles, et n on konstant, T aga juhuslik suurus. Keskväärtus $\mathbf{E}X_n$ võetakse üle kõigi trajektooride ühel ja samal ajahetkel n, kuid $\mathbf{E}X_T$ korral ajahetk T on igal trajektooril üldiselt erinev.

Teoreem 4. (Doob'i peatumisteoreem)

a) *Olgu T peatumishetk ja X supermartingaal. Siis igaüks järgnevatest tingimusest tagab, et X_T on integreeruv ja $\mathbf{E}X_T \le \mathbf{E}X_0$:*

   (i) *T on tõkestatud*

   (ii) *X on tõkestatud ($\exists K : |X_n| \le K,\ \forall n \ge 0$) ning $T < \infty$ p.k.*

   (iii) *$\mathbf{E}T < \infty$ ja mingi $K > 0$ korral $|X_n - X_{n-1}| \le K,\ \ \forall n \ge 1$.*

   (iv) *$X \ge 0$ ja $T < \infty$ p.k.*

b) *Kui T on peatumishetk, X on martingaal ning vähemalt üks tingimustest (i)-(iii) on rahuldatud, siis $\mathbf{E}X_T = \mathbf{E}X_0$.*

Tõestus

Osa a) õigsuse tõestamisel kasutame fakti, et $X_{T\wedge n} \to X_T$ *p.k.*, kui $T < \infty$ *p.k.* Tingimuse (i) täidetuse korral järeldub väide otseselt teoreemist 3. Juhtudel (ii) ja (iii) peame piirile minekul kasutama Lebesgue'i teoreemi tõkestatud koondumisest, kusjuures juhul (iii) tuleb selleks tähele panna, et

$$|X_{T\wedge n} - X_0| = |\sum_{k=1}^{T\wedge n}(X_k - X_{k-1})| \le KT.$$

Tingimuse (iv) täidetuse korral saame kasutada Fatou lemmat. Teoreemi osa b) tulemus järeldub osast a), kuna nii X kui ka $-X$ on sel juhul supermartingaalid. $\square$

Järeldus 1. *Olgu M selline martingaal, et mingi $K_1 > 0$ korral $|M_n - M_{n-1}| \le K_1\ \forall n \ge 1$. Olgu C selline ennustatav protsess, et $|C_n| \le K_2$ mingi $K_2 > 0$ korral. Kui T on selline peatumishetk, et $\mathbf{E}T < \infty$, siis $\mathbf{E}(C \bullet M)_T = 0$.*

Tõestus jääb lugejale (vt. kodused ülesanded).

Peatumisteoreemi kasutamiseks on vaja näidata, et $T < \infty$ ning mõnel juhul ka seda, et $\mathbf{E}T < \infty$. Tihti sobib selleks järgnev lemma.

Lemma 1. *Olgu T selline peatumishetk, et mingi $N \in \mathbf{N}$ ja $\varepsilon > 0$ korral kehtib võrratus*

$$\mathbf{P}(T \le n + N \mid \mathcal{F}_n) \equiv \mathbf{E}(I_{T\le n+N} \mid \mathcal{F}_n) > \varepsilon \quad p.k.\ \forall n \ge 1,$$

Siis $\mathbf{E}T < \infty$.

Tõestuse skeem:
Kõigepealt näitame matemaatilise induktsiooni abiga, et $\mathbf{P}(T > kN) \leq (1-\varepsilon)^k$.
Siis

$$\mathbf{E}T = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}(T > k) \leq \sum_{k=0}^{\infty} N\mathbf{P}(T > kN) \leq N \sum_{k=0}^{\infty} (1-\varepsilon)^k < \infty. \ \square$$

3 Koondumisteoreem

Paljud martingaalide rakendused põhinevad nende koondumisomadusel. Olgu X mingi juhuslik protsess. Olgu a ja b, $a < b$ mingid reaalarvud. Olgu $U_N[a,b](\omega)$ võrdne suurima sellise täisarvuga k, et leiduvad $0 \leq s_0 < t_0 < s_1 < t_1 < \ldots < s_k < t_k \leq N$, mille korral

$$X_{s_i} < a, \quad X_{t_i} > b \; \forall i \in \{0, 1, \ldots, N\}.$$

Seega suurus $U_N[a,b]$ on "ülestõusude " arv. Funktsioon $U_N[a,b]$ on $\mathcal{F}_N$-mõõtuv (miks?).

Lemma 2. (Doob'i ülestõusuvõrratus) *Olgu X supermartingaal. Siis*

$$(b-a)\mathbf{E}U_N[a,b] \leq \mathbf{E}[(X_N - a)^-].$$

<u>Tõestus</u>
Defineerime $C_1 = I_{\{X_0 < a\}}$ ja

$$C_i = I_{\{C_{I-1}=0\} \cap \{X_{i-1} < a\}} + I_{\{C_{i-1}=1\} \cap \{X_{i-1} \leq b\}}, \quad i \geq 2.$$

Protsess C on ennustatav ja mittenegatiivne, seega teoreemi 2 kohaselt on $Y = C \bullet X$ supermartingaal. Kuna

$$Y_N \geq (b-a)U_N[a,b] - (X_N - a)^-$$

(vt. pilti!), siis

$$(b-a)\mathbf{E}(U_N[a,b]) - E[(X_N - a)^-] \leq \mathbf{E}(Y_N) \leq \mathbf{E}(Y_0) = 0.$$

Seega

$$(b-a)\mathbf{E}(U_N[a,b]) - E[(X_N - a)^-]. \square$$

Definerime $U_\infty[a,b] = \lim_{N \to \infty} U_N[a,b]$

Lemma 3. *Olgu X ruumis L^1 tõkestatud supermartingaal ($\sup_n \mathbf{E}(|X_n|) < \infty$). Siis iga $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, korral kehtib*

$$\mathbf{P}(U_\infty[a,b] = \infty) = 0.$$

<u>Tõestus</u>
Lemma 2 põhjal

$$(b-a)\mathbf{E}U_N[a,b] \leq |a| + \mathbf{E}(|X_N|) \leq |a| + \sup_n \mathbf{E}(X_n) < \infty, \quad \forall N \geq 1.$$

Lastes $N \to \infty$, saame monotoonse koondumise teoreemi põhjal $\mathbf{E}U_\infty[a,b] < \infty$. Kuid siis

$$\mathbf{P}(U_\infty[a,b] = \infty) = 0.$$

$\square$

Teoreem 5. (Doob'i "ettepoole" koondumise teoreem)
Olgu X ruumis L^1 tõkestatud supermartingaal. Siis eksisteerib peaaegu kindlasti lõplik piirväärtus $X_\infty := \lim_{n\to\infty} X_n$.

<u>Tõestus</u>
Paneme tähele, et

$$\begin{aligned} A &= \{\omega \,:\, X_n(\omega) \text{ ei koondu hulgas } [-\infty; +\infty]\} \\ &= \{\omega \,:\, \liminf_n X_n(\omega) < \limsup_n X_n(\omega)\} \\ &= \cup_{a,b\in\mathbf{Q}:a<b}\{\omega : \liminf_n X_n(\omega) < a < b < \limsup_n X_n(\omega)\} \\ &= \cup_{a,b\in\mathbf{Q}:a<b}\{\omega \,:\, U_\infty[a,b](\omega) = \infty\}. \end{aligned}$$

Kuna A on loenduv ühend nullmõõduga hulkadest, siis $\mathbf{P}(A) = 0$ ja seega $\lim_n X_n$ eksisteerib hulgas $[-\infty; +\infty]$ p.k.. Näitame, et see piirväärtus on p.k. lõplik. Fatou lemma põhjal saame

$$\mathbf{E}(|X_\infty|) = \mathbf{E}(\liminf_n |X_n|) \leq \liminf_n \mathbf{E}(|X_n|) \leq \sup_n \mathbf{E}(|X_n|) < \infty,$$

järelikult $\mathbf{P}(|X_\infty| < \infty) = 1$. $\square$

Järeldus 2. *Kui X on mittenegatiivne supermartingaal, siis leidub p.k. lõplik piirväärtus $X_\infty := \lim_{n\to\infty} X_n$.*

<u>Tõestus:</u> Mittenegatiivne X on ruumis $\mathcal{L}^1$ tõkestatud, kuna sel juhul $\mathbf{E}|X_n| = \mathbf{E}X_n \leq \mathbf{E}_0$.

4 Ruumis L^2 tõkestatud martingaalid

Doobi koondumisteoreemis esinevat nõuet, et M on ruumis L^1 tõkestatud martingaal, on sageli on kõige lihtsam kontrollida nii, et vaadatakse, kas M on tõkestatud ruumis L^2. Olgu $M = (M_n : n \in \mathbf{N}_0)$ L^2-martingaal. Siis iga $0 \le s \le t \le u \le v$ korral kehtib

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[(M_t - M_s)(M_v - M_u)] &= \mathbf{E}[\mathbf{E}((M_t - M_s)(M_v - M_u) \mid \mathcal{F}_u)] \\ &= \mathbf{E}[(M_t - M_s)\mathbf{E}(M_v - M_u) \mid \mathcal{F}_u)] = 0, \end{aligned}$$

ehk martingaali juurdekasvud mittelõikuvate ajavahemike jooksul on ortogonaalsed (ruumis L^2). Seega kehtib valem

$$\mathbf{E}(M_n^2) = \mathbf{E}(M_0^2) + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}[(M_i - M_{i-1})^2]. \tag{5}$$

Teoreem 6. *Olgu M L^2-martingaal. M on tõkestatud ruumis L^2 parajasti siis, kui*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}[(M_k - M_{k-1})^2] < \infty. \tag{6}$$

Kui M on tõkestatud ruumis L^2, siis $M_n \to M_\infty$ p.k. ja ruumis L^2.

Tõestus. (5) tõttu on M tõkestatus ruumis L^2 on ekvivalentne seosega (6). Oletame nüüd, et (6) kehtib. Siis M on tõkestatud L^2-s, seega ka L^1-s. Doobi koondumisteoreemi põhjal saame, et $M_n \to M_\infty =: \liminf M_n$ p.k.. Näitame M_n koondumise ruumis L^2. Martingaali juurdekasvude ortogonaalsuse tõttu kehtib

$$\mathbf{E}(M_{n+r} - M_n)^2 = \sum_{k=n+1}^{n+r} \mathbf{E}(M_k - M_{k-1})^2.$$

Lastes $r \to \infty$ ja rakendades Fatou lemmat, saame

$$\mathbf{E}(M_\infty - M_n)^2 \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbf{E}(M_k - M_{k-1})^2.$$

Järelikult $\lim_n \mathbf{E}(M_\infty - M_n)^2 = 0$ ehk $M_n \to M_\infty$ ruumis L^2.□

Teoreem 7. *Olgu $(X_k,\ k \ge 1)$ selliste sõltumatute juhuslike suuruste jada, et iga k korral*

$$\mathbf{E}(X_k) = 0, \quad \sigma_k^2 = Var(X_k) < \infty.$$

(a) Siis võrratusest $\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 < \infty$ järeldub, et $\sum_{k=1}^{\infty} X_k$ koondub p.k.

(b) Kui $|X_k| < K$ $\forall k$ mingi $K > 0$ korral, siis summa $\sum_{k=1}^{\infty} X_k$ koondumisest peaaegu kõikjal järeldub, et $\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 < \infty$.

Tõestus. Defineerime

$$M_0 = 0, \quad M_n = \sum_{i=1}^{n} X_i,\ n > 0$$

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}, \quad \mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n),\ n > 0,$$

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2, \quad N_0 = 0,\ N_n = M_n^2 - A_n,\ n > 0.$$

Varasemast on teada, et M on martingaal filtratsiooni $\{\mathcal{F}_n\}$ suhtes.
(a) Kuna

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{E}[(M_i - M_{i-1})^2] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{E}(X_i^2) = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2 < \infty,$$

siis M on ruumis L^2 tõkestatud martingaal ning seetõttu teoreemi 6 kohaselt $M_n = \sum_{i=1}^n X_i$ koondub p.k.
(b) Kõigepealt paneme tähele, et N on $\{\mathcal{F}_n\}$-martingaal:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(N_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) &= \mathbf{E}[(M_n + X_{n+1})^2 \mid \mathcal{F}_n] - A_{n+1} \\ &= M_n^2 + 2M_n \mathbf{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) + \mathbf{E}(X_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n) - A_{n+1} = N_n.\end{aligned}$$

Fikseerime mingi $c > 0$ ning defineerime peatumishetke

$$T_c = \inf\{n : |M_n| > c\}.$$

Kuna peatatud protsess $N^{T_c} = N_{T_c \wedge n}$ on samuti martingaal, siis

$$\mathbf{E}(N_{T_c \wedge n}) = \mathbf{E}(M_{T_c \wedge n}^2) - \mathbf{E}(A_{T_c \wedge n}) = 0.$$

Tinglikustamise võtet kasutades

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(A_{T_c \wedge n}) &= \mathbf{E}(A_{T_c} | T_c \le n) \cdot \mathbf{P}(T_c \le n) + \mathbf{E}(A_n | T_c > n) \cdot \mathbf{P}(T_c > n) \\ &\ge A_n \mathbf{P}(T_c > n) \ge A_n \mathbf{P}(T_c = \infty),\end{aligned}$$

mistõttu saame

$$A_n \mathbf{P}(T_c = \infty) \le \mathbf{E}(M_{T_c \wedge n}^2)\ \forall n.$$

Võrratustest

$$|M_{(T_c \wedge n)-1}| < c, \quad |M_{T_c \wedge n} - M_{(T_c \wedge n)-1}| = |X_{T_c \wedge n}| \le K$$

järeldub nüüd, et

$$A_n \mathbf{P}(T_c = \infty) \le (K + c)^2\ \forall n.$$

Kuna

$$\{\omega : \lim_n M_n \text{ eksisteerib}\} \subset \cup_{k=1}^{\infty} \{T_k = \infty\},$$

siis piisavalt suure c korral $\mathbf{P}(T_c = \infty) > 0$ ning seetõttu

$$\lim_{n \to \infty} A_n = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2 < \infty. \ \square$$

5 Doobi lahutus ja martingaali ruutvariatsioon

Teoreem 8. (Doobi lahutus) *Olgu X kohandatud protsess, kusjuures $X_n \in L^1\ \forall n$. Siis X on esitatav kujul*

$$X = X_0 + M + A,$$

kus M on nullist algav martingaal ja A on nullist algav ennustatav protsess. See lahutus on ühene peaaegu kõikjal võrdumise mõttes. Protsess X on submartingaal parajasti siis, kui A on kasvav.

<u>Tõestus.</u> Idee: defineerime

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}(X_i - X_{i-1} \mid \mathcal{F}_{i-1})$$

ja

$$M_n = X_n - X_0 - A_n.$$

Kontrollime, et M on martingaal, siis on lahutuse olemasolu näidatud. Ühesuse demonstreerimiseks näitame, et kui on mingi nõutud omadustega protsessi X lahutus antud, siis A avaldub ülaltoodud kujul. $\square$

Olgu M nullist hakkav diskreetse aja ruuduga integreeruv martingaal (st. $\mathbf{E}(M_n^2) < \infty\ \forall n$). Siis tingliku keskväärtuse omaduse 8 kohaselt on M^2 submartingaal. Seega Doobi lahutuse kohaselt leiduvad martingaal N ja kasvav ennustatav protsess A sellised, et

$$M^2 = N + A.$$

Seda kasvavat protsessi tähistatakse $\langle M \rangle$. Defineerime

$$\langle M \rangle_\infty = \lim_{n\to\infty} \langle M \rangle_n.$$

Järgnevad tähelepanekud on kasulikud edaspidises:

(i) M on ruumis L^2 tõkestatud parajasti siis, kui $\mathbf{E}(\langle M \rangle_\infty) < \infty$,

(ii) $\langle M \rangle_n - \langle M \rangle_{n-1} = \mathbf{E}(M_n^2 - M_{n-1}^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}) = \mathbf{E}[(M_n - M_{n-1})^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}]$.

Nüüd me oleme valmis üldistama teoreemi 7.

Teoreem 9. *Olgu M nullist algav L^2-martingaal. Siis $\lim_n M_n$ eksisteerib peaaegu kindlasti hulgal*

$$\{\omega : \langle M \rangle_\infty(\omega) < \infty\}.$$

Kui martingaali M juurdekasvud on ühtlaselt tõkestatud, siis $\langle M \rangle_\infty < \infty$ peaaegu kindlasti hulgal

$$\{\omega : \lim_n M_n(\omega) \text{ eksisteerib}\}.$$

Tõestus. Defineerime

$$T_k = \inf\{n \,:\, \langle M \rangle_{n+1} > k\}.$$

Paneme tähele, et T_k on peatumishetk. ning et $\langle M \rangle_{n \wedge T_k}$ on ennustatav: iga Boreli hulga B korral

$$\{\langle M \rangle_{n \wedge T_k} \in B\} = F_1 \cup F_k,$$

kus

$$F_1 = \{\langle M \rangle_n \in B\} \cap \{T_k > n-1\} \in \mathcal{F}_{n-1}$$

ja

$$F_2 = \cup_{i=1}^{n-1} \left(\{\langle M \rangle_i \in B\} \cap \{T_k = i\}\right) \in \mathcal{F}_{n-1}.$$

Kuna $M^2 - \langle M \rangle$ on nullist algav martingaal, siis ka protsess

$$M^2_{n \wedge T_k} - \langle M \rangle_{n \wedge T_k}$$

on nullist algav martingaal ning seetõttu

$$\mathbf{E}(M^2_{n \wedge T_k}) = \mathbf{E}(\langle M \rangle_{n \wedge T_k}) \leq k.$$

Seega M^{T_k} on tõkestatud ruumis L^2 ning järelikult $M_{n \wedge T_k}$ koondub p.k. Seega oleme näidanud, et M_n koondub peaaegu kindlasti hulgal $\{T_k = \infty\}$. Võrdusest

$$\{\langle M \rangle_\infty < \infty\} = \cup_{k=1}^{\infty} \{T_k = \infty\}$$

järeldub nüüd teoreemi esimene väide.
Eeldame nüüd, et martingaali M juurdekasvud on ühtlaselt tõkestatud. Defineerime peatumishetke

$$T_k = \inf\{n \,:\, |M_n| > k\},$$

siis

$$|M_{n \wedge T_k}| \leq |M_{(n \wedge T_k)-1}| + |M_{n \wedge T_k} - M_{(n \wedge T_k)-1}| \leq k + K.$$

Kuna

$$\mathbf{E}(\langle M \rangle_{n \wedge T_k}) = \mathbf{E}(M^2_{n \wedge T_k}) < (k+K)^2,$$

siis

$$\mathbf{E}(\langle M \rangle_n I_{\{T_k = \infty\}}) \leq (k+K)^2.$$

Piiril $k \to \infty$ ning seejärel $n \to \infty$ saame siit

$$\mathbf{E}(\langle M \rangle_\infty I_G) \leq (k+K)^2,$$

kus

$$G = \{\omega \,:\, \text{ jada } M_n(\omega) \text{ on tõkestatud}\}.$$

Seega $\langle M \rangle_\infty < \infty$ peaaegu kindlasti hulgal G, mis sisaldab hulka

$$\{\omega \,:\, \lim_n M_n(\omega) \text{ eksisteerib}\}.\square$$

6 Ühtlane integreeruvus

Lemma 4. *(keskväärtuse absoluutne pidevus) Olgu $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ siis*
(a) Iga $\varepsilon > 0$ korral leidub selline $\delta > 0$, et tingimustest $F \in \mathcal{F}$, $\mathbf{P}(F) < \delta$ järeldub, et $\mathbf{E}(|X|; F) < \varepsilon$.
(b) Iga $\varepsilon > 0$ korral leidub selline $K > 0$, et $\mathbf{E}(|X|, |X| > K) < \varepsilon$.

Tõestus. (b) osa: Lebesgue tõkestatud koondumise teoreemist järeldub, et

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(|X|; |X| > n) = 0,$$

seega iga $\varepsilon > 0$ jaoks leidub selline n_0, et $n \geq n_0$ korral $\mathbf{E}(|X|; |X| > n) < \varepsilon$. Võtame $K = n_0$.
(a) osa: Fikseerime $\varepsilon > 0$ ning valime sellise $K > 0$, et $\mathbf{E}(|X|, |X| > K) < \frac{\varepsilon}{2}$. Defineerime $\delta = \frac{\varepsilon}{2K}$. Siis tingimustest $F \in \mathcal{F}$, $\mathbf{P}(F) < \delta$ järeldub, et

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(|X|; F) &= \mathbf{E}(|X|; F \cap \{|X| > K\}) + \mathbf{E}(|X|; F \cap |X| \leq K)\\ &\leq \mathbf{E}(|X|; |X| > K) + K\mathbf{P}(F) < \varepsilon.\square\end{aligned}$$

Definitsioon 6. *Juhuslike suuruste hulka $\mathcal{C} \subset L^1$ kutsutakse* **ühtlaselt integreeruvaks** *(ÜI), kui iga $\varepsilon > 0$ korral leidub selline $K \geq 0$, et*

$$\mathbf{E}(|X|\,;\,|X| > K) < \varepsilon \quad \forall X \in \mathcal{C}.$$

Märkus. ühtlasest integreeruvusest järeldub tõkestatus, kuid tõkestatusest ei järeldu ühtlast integreeruvust.

Lemma 5. *(Piisavad tingimused ühtlaseks integreeruvuseks).*
(a) Kui leidub sellised $p > 1$ ja $A > 0$, et $\mathbf{E}(|X|^p) < A$ $\forall X \in \mathcal{C}$, siis $\mathcal{C}$ on ÜI.
(b) Kui leidub selline integreeruv juhuslik suurus Y, et $|X(\omega)| \leq Y(\omega)$ p.k. $\forall X \in \mathcal{C}$, siis $\mathcal{C}$ on ÜI.

Tõestus. Harjutus.

Teoreem 10. *(Tinglike keskväärtuste pere ühtlane integreeruvus). Olgu antud $X \in L^1$. Siis juhuslike suuruste pere*

$$\mathcal{C} = \{\mathbf{E}(X \mid \mathcal{G}) \,:\, \mathcal{G} \text{ on } \mathcal{F} \text{ alam-}\sigma\text{-algebra}\}$$

on ühtlaselt integreeruv.

Tõestus. Olgu antud $\varepsilon > 0$. Valime sellise $\delta > 0$, et tingimustest $F \in \mathcal{F}$, $\mathbf{P}(F) < \delta$ järeldub, et $\mathbf{E}(|X|; F) < \varepsilon$. Valime sellise $K > 0$, et $\frac{1}{K}\mathbf{E}(|X|) < \varepsilon$. Näitame, et siis

$$\mathbf{E}(|Y|; |Y| > K) < \varepsilon \quad \forall Y \in \mathcal{C}.$$

Selleks fikseerime mingi $Y \in \mathcal{C}$, $Y = \mathbf{E}(X \mid \mathcal{G})$. Tingliku keskväärtuse omaduse 8 põhjal

$$|Y| \leq \mathbf{E}(|X| \mid \mathcal{G}).$$

Seega $\mathbf{E}(|Y|) \leq \mathbf{E}(|X|)$ ning seetõttu võrratusest

$$K\mathbf{P}(|Y| > K) \leq \mathbf{E}(|Y|)$$

järeldub, et

$$\mathbf{P}(|Y| > K) < \delta.$$

Kuna $\{|Y| > K\} \in \mathcal{G}$, siis saame nüüd, et

$$\mathbf{E}(|Y|\,;\,|Y| > k) \leq \mathbf{E}(|X|\,;\,|Y| > K) < \varepsilon.$$

Teoreem on tõestatud. $\Box$

Teoreem 11. . *Kui juhuslike suuruste jata X_n koondub juhuslikuks suuruseks X tõenäosuse järgi ning kui $|X_n(\omega)| \leq K$ p.k $\forall n$, siis*

$$\mathbf{E}(|X_n - X|) \to 0.$$

Tõestus. Kõigepealt näitame, et $\mathbf{P}(X > K) = 0$. Tõepoolest, kuna

$$\mathbf{P}(|X| > K + \frac{1}{k}) \leq \mathbf{P}(|X - X_n| > \frac{1}{k})\ \forall n,$$

siis $\mathbf{P}(|X| > K + \frac{1}{k}) = 0$. Seega

$$\mathbf{P}(|X| > K) = \mathbf{P}(\bigcup_{k=1}^{\infty}\{|X| > K + \frac{1}{k}\}) = 0.$$

Fikseerime $\varepsilon > 0$. Kuna

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(|X - X_n|) &= \mathbf{E}(|X - X_n|\,;\,|X - X_n| \leq \varepsilon) + \mathbf{E}(|X - X_n|\,;\,|X - X_n| > \varepsilon)\\ &\leq \varepsilon + 2K\mathbf{P}(|X - X_n| > \varepsilon),\end{aligned}$$

siis

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbf{E}(|X - X_n| \leq \varepsilon.$$

Piiril $\varepsilon \to 0$ saame nüüd, et $\limsup_{n\to\infty} \mathbf{E}(|X - X_n|) = 0$, seega

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(|X - X_n|) = 0. \ \Box$$

Teoreem 12. *(L^1 koondumise tarvilik ja piisav tingimus) Juhuslike suuruste jada X_n koondub juhuslikuks suuruseks X parajasti siis, kui jada X_n on ÜI ning $X_n \to X$ tõenäosuse järgi.*

Tõestus. Piisavus: oletame, et $X_n \to X$ tõenaösuse järgi ning $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ on ÜI. Fikseerime mingi $\varepsilon > 0$ ning valime sellise $K > 0$, et

$$\mathbf{E}(|X|\,;\,|X| > K) < \varepsilon,\ \mathbf{E}(|X_n|\,;\,|X_n| > K) < \varepsilon.$$

Defineerime funktsiooni

$$\phi_K(x) = \begin{cases} K, & \text{kui } x > K, \\ x, & \text{kui } |x| \le K, \\ -K, & \text{kui } x < -K. \end{cases}$$

Kuna $|\phi_K(X_n) - \phi_K(X)| \le |X_n - X|$, siis

$$\phi_K(X_n) \to \phi_K(X) \text{ tõenäosuse järgi}$$

ning teoreemi 11 põhjal ka ruumis L^1. Kasutades võrratust

$$\mathbf{E}(|X_n - X|) \le \mathbf{E}(|X_n - \phi_K(X_n)| + \mathbf{E}(|\phi_K(X_n) - \phi_K(X)|) + \mathbf{E}(|\phi_K(X) - X|)$$

saame nüüd, et

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbf{E}(|X_n - X|) \le 2\varepsilon.$$

Piiril $\varepsilon \to 0$ saame siit, et $\limsup_{n\to\infty} \mathbf{E}(|X - X_n|) = 0$, seega

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(|X - X_n|) = 0,$$

s.t. $X_n \to X$ ruumis L^1.
Tarvilikkus: kuna

$$\varepsilon \mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \le \mathbf{E}(|X_n - X|),$$

siis $X_n \to X$ tõenäosuse järgi. Veel on vaja näidata, et jada X_n on ÜI. Selleks fikseerime $\varepsilon > 0$ ning valime sellise n_0, et

$$\mathbf{E}(|X_n - X|) < \frac{\varepsilon}{2} \; \forall n > n_0.$$

Järgmisena valime sellise $\delta > 0$, et tingimusest $\mathbf{P}(F) < \delta$ järeldub, et

$$\mathbf{E}(|X|\,;\, F) < \frac{\varepsilon}{2}, \; \mathbf{E}(|X_n|\,;\, F) < \varepsilon, \; 1 \le n \le n_0.$$

Nüüd valime sellise K, et

$$\frac{1}{K} \sup_i \mathbf{E}(|X_i|) < \delta,$$

siis $\mathbf{P}(|X_i| > K) < \delta \; \forall i$ ning

$$\mathbf{E}(|X_n|\,;\, |X_n| > K) \le \begin{cases} \mathbf{E}(|X_n|\,;\, |X_n| > K) < \varepsilon & \text{kui } n \le n_0, \\ \mathbf{E}(|X|\,;\, |X_n| > K) + \mathbf{E}(|X_n - X|) < \varepsilon, & \text{kui } n > n_0. \end{cases}$$

Seega jada X_n on ÜI. □

Ülesanne 1. *Olgu $\mathcal{C}$ ja $\mathcal{D}$ ÜI hulgad. Defineerime*

$$\mathcal{H} = \mathcal{C} + \mathcal{D} = \{X + Y \,:\, X \in \mathcal{C},\; Y \in \mathcal{D}\}.$$

Tõestada, et $\mathcal{H}$ on ÜI.

7 Ühtlaselt integreeruvad martingaalid

Definitsioon 7. *M on* ÜI martingaal*, kui M on martingaal ning hulk $\{M_n, n = 0, 1, \ldots\}$ on ÜI.*

Teoreem 13. *Olgu M ÜI martingaal. Siis*

$$M_\infty = \lim M_n \text{ eksisteerib p.k ning ruumis } L^1$$

ning iga $n \in \mathbf{N}_0$ korral

$$M_n = \mathbf{E}(M_\infty \mid \mathcal{F}_n) \text{ p.k.}$$

Tõestus. Harjutus

Teoreem 14. (Lévy koondumisteoreem) *Olgu antud $\xi \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Defineerime $M_n = \mathbf{E}(\xi \mid \mathcal{F}_n)$. Siis M on ÜI martingaal ning*

$$M_n \to \mathbf{E}(\xi \mid \mathcal{F}_\infty) \text{ p.k ning ruumis } L^1.$$

Tõestus. Tingliku keskväärtuse Torni omadusest järeldub, et M on martingaal. Teoreemi 10 põhjal on hulk $\{M_n,\ n \in \mathbf{N}_0\}$ ÜI, seega on tegemist ÜI martingaaliga. Seega (teor. 13) leidub selline M_∞, et $M_n \to M_\infty$ p.k ning ruumis L^1. Meil on vaja näidata, et $M_\infty = \eta$ *p.k.*, kus $\eta = \mathbf{E}(\xi \mid \mathcal{F}_\infty)$.
Ilma üldsust kitsendamata (miks?) võime eeldada, et $\xi \geq 0$. Defineerime σ-algebral $\mathcal{F}_\infty$ mõõdud $\mathbf{Q}_1$ ja $\mathbf{Q}_2$ järgmiselt:

$$\mathbf{Q}_1(F) = \mathbf{E}(M_\infty\,;\,F),\ \mathbf{Q}_2(F) = \mathbf{E}(\eta\,;\,F)\ \forall F \in \mathcal{F}_\infty.$$

Kuna $F \in \mathcal{F}_n$ korral

$$\mathbf{E}(M_\infty\,;\,F) = \mathbf{E}(M_n\,;\,F) = \mathbf{E}(\eta\,;\,F),$$

siis mõõdud $\mathbf{Q}_1$ ja $\mathbf{Q}_2$ langevad kokku algebral $\cup_{n=0}^\infty \mathcal{F}_n$, seetõttu langevad nad kokku ka σ-algebral $\mathcal{F}_\infty$.
Defineerime $M_\infty = \limsup M_n$, siis M_∞ ja η on mõlemad $\mathcal{F}_\infty$-mõõtuvad. Seega

$$F = \{M_\infty - \eta > 0\} \in \mathcal{F}_\infty$$

ning mõõtude $\mathbf{Q}_1$ ja $\mathbf{Q}_2$ kokkulangevuse tõttu

$$\mathbf{E}(M_\infty - \eta\,;\,\{M_\infty - \eta > 0\}) = 0.$$

Analoogiliselt saame, et

$$\mathbf{E}(M_\infty - \eta\,;\,\{M_\infty - \eta < 0\}) = 0,$$

järelikult $M_\infty = \eta$ p.k.□

Teoreem 15. (Doobi supermartingaali võrratus) *Olgu Z mittenegatiivne submartingaal. Siis iga $c > 0$ korral kehtib*

$$c\mathbf{P}\left(\sup_{k\le n} Z_k \ge c\right) \le \mathbf{E}(Z_n\,;\, \sup_{k\le n} Z_k \ge c) \le \mathbf{E}(Z_n).$$

Tõestus. Tähistame

$$F = \{\sup_{k\le n} Z_k \ge c\}$$

ning defineerime

$$\begin{aligned} F_0 &= \{Z_0 \ge c\}, \\ F_k &= \left(\bigcap_{i=0}^{k-1}\{Z_i < c\}\right) \cap \{Z_k \ge c\},\ k \ge 1. \end{aligned}$$

Paneme tähele, et hulgad Z_k on lõikumatud ning

$$F = \bigcup_{i=0}^{n} F_i.$$

Kuna $F_k \in \mathcal{F}_k$ ning $Z \ge c$ hulgal F_k, siis

$$\mathbf{E}(Z_n\,;\, F_k) \ge \mathbf{E}(Z_k\,;\, F_k) \ge c\mathbf{P}(F_k).$$

Viimati saadud võrratuse summeerimine üle k annabki teoreemi väites toodud võrratuse. □

Ülesanne 2. *Olgu (X_n) selline juhuslike suuruste jada, et $X_\infty = \lim_n X_n$ eksisteerib p.k. ning et mingi $Y \in L^1$ korral*

$$|X_n(\omega)| \le Y(\omega)\ \forall n, \omega.$$

Olgu $\{\mathcal{F}_n\}$ suvaline filtratsioon. Tõestada, et

$$\mathbf{E}(X_n \mid \mathcal{F}_n) \to \mathbf{E}(X_\infty \mid \mathcal{F}_\infty).$$

8 Üleminek pidevale ajale. Browni liikumine.

Siiani vaatlesime martingaali kui diskreetse ajaga protsessi. Martingaali lihtsaim näide oli lihtne sümmeetriline juhuslik ekslemine. Browni liikumise saamiseks laseme juhusliku ekslemise ajasammul ja ka ruumisammul läheneda nullile. Tähistame $X_t = \Delta x \cdot (X_1 + X_2 + \ldots + X_{[\frac{t}{\Delta t}]})$, kus

$$X_i = \begin{cases} +1, & \text{tõenäosusega } \frac{1}{2}, \\ -1, & \text{tõenäosusega } \frac{1}{2}, \end{cases}$$

Δx - ruumisammu pikkus,

Δt - ajasammu pikkus,

$\frac{t}{\Delta t}$ - ajasammude arv vahemikus $[0, t]$.

Kuna $X_1, X_2, \ldots, X_{[\frac{t}{\Delta t}]}$ on sõltumatud sama jaotusega juhuslikud suurused keskväärtusega $EX_i = 0$ ja dispersiooniga $DX_i = 1$, siis iga Δx ja Δt korral $EX_t = 0$ ning $DX_t = (\Delta x)^2[\frac{t}{\Delta t}]$. Kui $\Delta t \to 0, \Delta x \to 0$, siis liidetavate arv $[\frac{t}{\Delta t}]$ kasvab piiramatult ja tsentraalse piirteoreemi põhjal

$$\frac{X_t}{\Delta x\sqrt{[\frac{t}{\Delta t}]}} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, 1).$$

Valides Δx ja Δt vahekorra sellise, et $\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} = \text{ const } =: C^2$, saame piiril, et $X_t \sim N(0, C\sqrt{t})$. Saadav piirprotsess X_t säilitab juhusliku ekslemise mõned tähtsad omadused:

(i) Protsessi X_t juurdekasvud mittelõikuvates ajavahemikes on sõltumatud st $0 \leq s \leq t \leq u \leq v$ korral $X_t - X_s$ ja $X_v - X_u$ on sõltumatud juhuslikud suurused (omadus kehtib ka n ajaintervalli korral).

(ii) Protsessi X_t juurdekasvud on statsionaarsed, st $X_{t+a} - X_{s+a}$ jaotus ei sõltu a väärtusest vaid ainult vahest $t - s$.

Definitsioon 8 (Browni liikumine)**.** *Juhuslikku protsessi* $\{W_t, t \geq 0\}$ *nimetatakse Browni liikumiseks (ehk Wieneri protsessiks), kui*

(i) $W(0) = 0$,

(ii) $\forall\ t > 0$ *korral* $W_t \sim N(0, C\sqrt{t})$, C *- konstant,*

(iii) W_t *juurdekasvud on sõltumatud ja statsionaarsed,*

(iv) W_t *trajektoorid on* t *järgi pidevad funktsioonid.*

Definitsioonis toodud omadused määravad üheselt Browni liikumise juurdekasvu jaotuse ajaintervallis $[s, t]$: juurdekasvude statsionaarsuse tõttu

$$W_t - W_s \stackrel{\mathcal{D}}{=} W_{t-s} - W_0 = W_{t-s} \sim N(0, C\sqrt{t-s}),$$

kus sümbol $\stackrel{\mathcal{D}}{=}$ tähendab jaotuse järgi võrdumist.

Browni liikumisel on rakendusi nii füüsikas (difusioonide uurimisel) kui ka majanduses (aktsiate tulususe mudelid)ning mujal.

Kui $C \equiv 1$, siis Browni liikumist nimetatakse *standardseks* Browni liikumiseks.

Protsessi $W_t + \mu t$, kus μ on reaalarv, nimetatakse *triiviga* Browni liikumiseks (μ on nn. triivikordaja). Positiivse triivi korral protsessi keskväärtus kasvab ajas, negatiivse triivi korral see kahaneb.

Vaatleme standardse Browni liikumise "lõplikumõõtmelist" jaotust, st juhusliku vektori $(W_{t_1}, W_{t_2}, \ldots, W_{t_n})$ jaotust $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$. Iga t_i korral kehtib, et

$$f_{W_{t_i}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t_i}} e^{-\frac{x^2}{2t_i}},$$

kui $C = 1$. Arvestame seda, et võrdused

$$\begin{cases} W_{t_1} = x_1 \\ W_{t_2} = x_2 \\ \ldots \\ W_{t_n} = x_n \end{cases}$$

ja võrdused

$$\begin{cases} W_{t_1} = x_1 \\ W_{t_2} - W_{t_1} = x_2 - x_1 \\ \ldots \\ W_{t_n} - W_{t_{n-1}} = x_n - x_{n-1} \end{cases}$$

on ekvivalentsed, komponendid $W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ on aga sõltumatud. Saame, et

$$f_{W_{t_1},\ldots,W_{t_n}}(x_1, \ldots, x_n) \stackrel{ekvivalents}{=}$$

$$= f_{W_{t_1}, W_{t_2}-W_{t_1}, \ldots, W_{t_n}-W_{t_{n-1}}}(x_1, x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1}) = \ldots$$

ning juurdekasvude sõltumatuse põhjal võime olemasoleva esitada tiheduste korrutisena, st

$$\ldots = f_{W_{t_1}}(x_1) \cdot \ldots \cdot f_{W_{t_n} - W_{t_{n-1}}}(x_n - x_{n-1}) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi t_1}} e^{-\frac{{x_1}^2}{2t_1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_2 - t_1)}} e^{-\frac{(x_2-x_1)^2}{2(t_2-t_1)}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi t_n - t_{n-1}}} e^{-\frac{(x_n-x_{n-1})^2}{2(t_n-t_{n-1})}}.$$

Kasutame saadud tulemust mõningate tulemuste lihtsustamiseks. Vaatleme konkreetset probleemi. Olgu teada, et Browni liikumine võtab hetkel t väärtuse B ehk $W_t = B$ ja olgu s mingi varasem ajahetk, $s < t$. Milline on siis W_s tinglik jaotus tingimusel $W_t = B$? Et tinglik tihedus avaldub suhtena

$$f_{W_s|W_t}(x|B) = \frac{f_{W_s,W_t}(x,B)}{f_{W_t}(B)} =$$

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \cdot e^{\frac{x^2}{2s}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \cdot e^{\frac{(B-x)^2}{2(t-s)}}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \cdot e^{\frac{B^2}{2t}}} = \ldots = K \cdot e^{-\frac{t(x-B\frac{s}{t})^2}{2s(t-s)}},$$

kus K ei sõltu x väärtusest (sõltub suurustest B, t, s).

9 Mõned Browni liikumisega seotud jaotused

Järgnevas peame silmas, et Browni liikumise trajektoorid on pidevad.

1) **Aeg, millal Browni liikumine saavutab nivoo a.**
Olgu $W_0 = 0$ ja olgu $a > 0$. Tähistame $T_a = \inf\{T : W_t = a\}$ ehk T_a on esimene hetk, millal Browni liikumine saavutab nivoo a. T_a on juhuslik suurus, sest T_a väärtus sõltub trajektoorist, trajektoori määrab aga ω. Leiame T_a jaotusfunktsiooni $P\{T_a \leq t\}$. Selleks avaldame $P\{W_t \geq a\}$ täistõenäosuse valemi abil:

$$P\{W_t \geq a\} = P\{W_t \geq a|T_a \leq t\} \cdot P\{T_a \leq t\} + P\{W_t \geq a|T_a > t\} \cdot P\{T_a > t\}.$$

Juhul $T_a \leq t$, arvestades Browni liikumise juurdekasvude statsionaarsust ja võrdust $W_{T_a} = a$, võime kirjutada $W_t - a = W_t - W_{T_a} \stackrel{\mathcal{D}}{=} W_{t-T_a} - W_0 = W_{t-T_a} \sim N(0, C\sqrt{t-T_a})$, millest järeldub, et W_t tinglik jaotus on $N(a, \sqrt{t-T_a})$. Et normaaljaotus on keskväärtuse suhtes sümmeetriline, siis $P\{W_t \geq a|T_a \leq t\} = \frac{1}{2}$. Samal ajal ilmselt $P\{W_t \geq a|T_a > t\} = 0$, mistõttu kokkuvõttes $P\{W_t \geq a\} = \frac{1}{2}P\{T_a \leq t\}$, millest

$$P\{T_a \leq t\} = 2P\{W_t \geq a\}.$$

Et $W_t \sim N(0, \sqrt{t})$, siis

$$P\{T_a \leq t\} = 2\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_a^\infty e^{-\frac{x^2}{2t}}dx = 2[1 - \Phi\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right)]$$

Kui $a < 0$, siis sümmeetria põhjal $P\{T_a \leq a\} = 2[1 - \Phi\left(\frac{|a|}{\sqrt{t}}\right)]$.
Kui $a = 0$, siis $T_0 = 0$ ja meil pole midagi uurida. Kokkuvõttes kehtib suvalise a korral

$$P\{T_a \leq t\} = 2[1 - \Phi\left(\frac{|a|}{\sqrt{t}}\right)].$$

Siit nähtub ühtlasi, et $t \to \infty$ korral

$$\mathbf{P}(T_a < \infty) = \lim_{t\to\infty} \mathbf{P}(T_a \leq t = 1. \tag{7}$$

2) Vaatleme **Browni liikumise maksimumi** jaotust lõigul $[0, t]$.
Kui $a > 0$, siis $P\{\max_{0\leq s\leq t} W_s \geq a\} = P\{T_a \leq t\} \stackrel{punkt\ 1)}{=} 2[1 - \Phi\left(\frac{|a|}{\sqrt{t}}\right)]$.
Kui $a < 0$, siis $P\{\max_{0\leq s\leq t} W_s \geq a\} = 1$.

3) **Browni liikumine kahe konkureeriva nivoo vahel**
Olgu $A > 0, B > 0$. Leiame tõenäosuse, et alustades 0-st Browni liikumine jõuab nivoole A enne kui nivoole $-B$. Siin kasutame ära lihtsa sümmeetrilise juhusliku ekslemise vastava omaduse, mille kohaselt otsitav tõenäosus on suhe $\frac{A}{A+B}$. Et sama vastus kehtib kuitahes lühikes ajasammu ja ruumisammu korral, siis saame tulemuseks

$$P\{W_t \text{ jõuab nivoole } A \text{ enne kui nivoole } -B\} = P\{T_A < T_B\} = \frac{B}{A+B}.$$

Seega, mida kaugemal on $-B$, seda suurem on tõenäosus, et jõuame enne A-le ja kui kaugused on võrdsed, siis tõenäosused on võrdsed.

Ülesanne 3. *Olgu W_t standardne Browni liikumine. Olgu teada, et $W_1 = 2$. Leida tõenäosus, et siis $W_5 < 5$.*

Kui tingimust ei oleks, siis $P\{W_5 < 0\} = \frac{1}{2}$, sest $W_t \sim N(0, \sqrt{t})$.
Tingimust arvestades on juurdekasv $W_5 - W_1 \sim N(0, \sqrt{4})$ - see jaotus sõltub lõigu pikkusest, mitte asukohast. Saame, et

$$P\{W_5 < 0 | W_1 = 2\} = P\{W_5 - W_1 < -2 | W_1 = 2\} =$$

$$= P\{W_5 - W_1 < -2\} = P\{W_4 < -2\} =$$

$$= P\{N(0, \sqrt(4)) < -2\} = \Phi\left(\frac{-2}{2}\right) = \Phi(-1) = 0.16 \ .$$

10 Pideva ajaga martingaalid

Diskreetse ajaga martingaalide juurest tuttavad mõisted ja tulemused on ilma suuremate muudatusteta üle kantavad pidevale ajale. Olgu antud tõenäosusruum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ ja olgu t reaalarvuline parameeter (aeg).

Definitsioon 9. *σ-algebrate peret $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ nimetatakse* filtratsiooniks, *kui 1) kõik selle pere liikmed $\mathcal{F}_t$ on $\mathcal{F}$ alam-σ-algebrad ning 2) $s < t$ korral $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$.*

Sarnaselt diskreetse ajaga pakub meile peamiselt huvi *naturaalne filtratsioon* $\{\mathcal{F}_t^X, t \geq 0\}$, mis on tekitatud mingi juhusliku protsessi X poolt. Nagu varemgi, $\mathcal{F}_t^X$ sisaldab informatsiooni, mis on tekitatud juhuliku protsessi X poolt ajaintervallis $[0, t]$. See tähendab, et sündmus $A \in \mathcal{F}_t^X$, kui X trajektoori $\{X_s, 0 \leq s \leq t\}$ põhjal on võimalik öelda, kas A toimus või mitte.

Definitsioon 10. *Kui $\{Y_t, t \geq 0\}$ on selline juhuslik protsess, et iga t korral juhuslik suurus Y_t on $\mathcal{F}_t$-mõõtuv, siis öeldakse, et protses Y on* kohandatud *filtratsioonile $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$.*

Näited:

1. Juhuslik protsess $Z_t = \int_0^t X_s ds$ on kohandatud filtratsioonile $\{\mathcal{F}_t^X, t \geq 0\}$, kuna X trajektoori teadmine ajaintervallis $[0, t]$ on piisav Z_t määramiseks.
2. Protsess $M_t = \max_{0 \leq s \leq t} W_s$ on kohandatud filtratsioonile $\{\mathcal{F}_t^W, t \geq 0\}$.
3. Protsess $Z_t = W_{t+1}^2 - W_t^2$ ei ole kohandatud filtratsioonile $\{\mathcal{F}_t^W, t \geq 0\}$.

Analoogselt diskreetse ajaga defineerime pideva ajaga martingaali.

Definitsioon 11. *Olgu $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ tõenäosusruum filtratsiooniga $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$. Juhuslikku protsessi $\{M_t, t \geq 0\}$ nimetatakse* martingaaliks, *kui*

1. *M on kohandatud filtratsioonile $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$,*
2. *$\mathbf{E}|M_t| < \infty, \quad \forall t$*
3. *suvaliste $s \leq t$ korral $\mathbf{E}(M_t | \mathcal{F}_s) = M_s \quad$ p.k.*

Kui punktis 3. võrdusmärk asendada võrratusega $\leq$ (või $\geq$), siis räägitakse *supermartingaalist* (vastavalt *submartingaalist).*

Märkus: Analoogselt võib defineerida martingaali ka lõplikul lõigul $[0, T]$. Edaspidi mõistame filtratsiooni all tavaliselt Browni liikumise W poolt tekitatud filtratsiooni $\{\mathcal{F}_t^W, t \geq 0\}$.

Definitsioon 12. *Juhuslikku suurust T nimetatakse* peatumishetkeks *filtratsiooni $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ suhtes, kui iga $t \geq 0$ korral sündmus $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.*

Martingaalist üldisem mõiste on lokaalne martingaaal.

Definitsioon 13. *Protsess* $\{X_t, t \geq 0\}$ *on* lokaalne martingaal, *kui leidub selline peatumishetkede jada* T_n, $n = 1, 2, \ldots$, *et peatatud protsess* $\{X_{t \wedge T_n}, t \geq 0\}$ *on martingaal iga* n *korral ja*

$$\mathbf{P}[\lim_{t \to \infty} T_n = \infty] = 1.$$

Iga martingaal on ka lokaalne martingaal (kuidas valida T_n?), kuid lokaalne martingaal ei tarvitse olla martingaal. See on põhjuseks, miks me järgnevas nõuame sageli tõkestatuse tingimuse täidetust.

Väga tähtsad pideva ajaga martingaalid on seotud Browni liikumisega.

Lemma 6. *Olgu* W_t *standardne Browni liikumine ja* $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *tema poolt tekitatud filtratsioon. Siis*

1. W_t *on martingaal,*
2. $W_t^2 - t$ *on martingaal,*
3. $\exp(\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t)$ *on martingaal (nn* eksponentsiaalne martingaal).

Tõestus: Tõestused on üsna sarnased. Vaatleme näiteks protsessi $M_t = W_t^2 - t$. Ilmselt $\mathbf{E}|M_t| < \infty$. Arvutame nüüd esmalt

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(W_t^2 - W_s^2 | \mathcal{F}_s) &= \mathbf{E}[(W_t - W_s)^2 + 2W_s(W_t - W_s)|\mathcal{F}_s)] \\
&= \mathbf{E}[(W_t - W_s)^2 | \mathcal{F}_s] + 2W_s \mathbf{E}[(W_t - W_s)|\mathcal{F}_s] \\
&= t - s.
\end{aligned}$$

Seega

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(W_t^2 - t | \mathcal{F}_s) &= \mathbf{E}(W_t^2 - W_s^2 + W_s^2 - (t-s) - s | \mathcal{F}_s) \\
&= (t - s) + W_s^2 - (t - s) - s = W_s^2 - s.
\end{aligned}$$

Väga kasulik on Doobi peatumisteoreemi pideva ajaga analoog. Seejuures peab aga jälgima, et protsessi trajektoorid oleksid küllalt "kenad". Kõikides meie järgnevates näidetes juhuslike protsesside trajektoorid on paremalt pidevad ja omavad vasakpoolset piirväärtust (prants.k. *continues à droite, limites à gauche* - lühidalt *càdlàg*).
Näiteks pidevad funktsioonid (Browni liikumise trajektoorid) on automaatselt *càdlàg.*

Teoreem 16. *Kui* $\{M_t, t \geq 0\}$ *on càdlàg martingaal filtratsiooni* $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *suhtes ja* τ_1 *ning* τ_2 *on kaks tõkestatud peatumishetke,* $\tau_1 \leq \tau_2 \leq K$, *siis*

$$\mathbf{E}|M_{\tau_2}| < \infty$$

ja

$$\mathbf{E}(M_{\tau_2} | \mathcal{F}_{\tau_1}) = M_{\tau_1}, \quad \mathbf{P} - p.k.$$

Märkus: Erijuhul, kui τ on tõkestatud peatumishetk, siis saame $\mathbf{E}M_\tau = \mathbf{E}M_0$. Peatumisteoreemi rakendusena vaatleme järgmist tulemust.

Lemma 7. *Olgu W_t standardne Browni liikumine ja olgu T_a nivoo a saavutamise aeg, $T_a = \inf\{t \geq 0 : W_t = a\}$. Siis $\theta > 0$ korral*

$$\mathbf{E}\left[e^{-\theta T_a}\right] = e^{-\sqrt{2\theta}|a|}.$$

Tõestus. Olgu $a \geq 0$ (juhul $a < 0$ saame vastuse sümmeetria abil). Vaatleme martingaali $M_t = \exp(\sigma W_t - \sigma^2 t/2)$. Kuna T_a ei ole tõkestatud peatumishetk, siis teoreem 16 otseselt ei rakendu. Selle asemel vaatleme tõkestatud peatumishetki $\tau_1 = 0$ ja $\tau_2 = T_a \wedge n$. Teoreem 16 annab siis, et

$$\mathbf{E}(M_{T_a \wedge n}) = \mathbf{E}M_0 = 1, \ \forall n.$$

Näitame, et $\mathbf{E}M_{T_a} = \lim_n \mathbf{E}(M_{T_a \wedge n})$. Selleks meenutame, et $T_a < \infty$ p.k. (vt seos (7)), mistõttu alates mingist n väärtusest $T_a < n$ ja seega

$$M_{T_a \wedge n} \to M_{T_a} \quad \text{p.k.}$$

Samas on peatatud martingaal $M_{T_a \wedge n}$ kahelt poolt tõkestatud, sest $W_{T_a \wedge n} \leq a$ ning

$$0 \leq M_{T_a \wedge n} = exp\left(\sigma W_{T_a \wedge n} - \frac{\sigma^2}{2}(T_a \wedge n)\right) < e^{\sigma a}.$$

Seetõttu rakendub tõkestatud koondumise teoreem, mis annabki

$$\mathbf{E}M_{T_a} = \lim_n \mathbf{E}(M_{T_a \wedge n}) = 1.$$

Keskväärtuse $\mathbf{E}M_{T_a}$ saame aga hõlpsasti avaldada:

$$1 = \mathbf{E}M_{T_a} = \mathbf{E}\left[e^{(\sigma a - \frac{1}{2}\sigma^2 T_a)}\right].$$

Valides siin $\sigma^2 = 2\theta$, saame nõutud seose.$\square$

Äsjavaadeldud lemmat saab kasutada näiteks keskväärtuse $\mathbf{E}T_a$ leidmiseks. (vt. kodune ülesanne 18.)

11 Stohhastiline integraal

Diskreetse ajaga martingaalide korral defineerisime martingaalteisenduse valemiga

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} C_i(X_i - X_{i-1}) =: (C \bullet X)_n,$$

mis on tõlgendatav kui mängija koguvõit pärast mängu n (siin C_i on mängija panus mängus i ning $X_i - X_{i-1}$ on võit ühikulise panuse kohta mängus i.) Oluline fakt on see, et kui C_i on ennustatav protsess ja X on martingaal, siis ka protsess Y on martingaal (Teoreem 2). Ühtlasi on näha, et martingaalteisenduse valem kujutab endast teatavat integraalsummat. Seame eesmärgiks defineerida analoogne mõiste (stohhastiline integraal) ka pideva ajaga martingaalide suhtes. Stohhastiline integraal on tõhus vahend paljude küsimuste lahendamisel sh ka optsioonide hindamisel.
Esmalt näitame, et pideva ajaga martingaalide suhtes pole võimalik integreerida tavalises (Riemann- Stiltjese integraali) mõttes.

11.1 Variatsiooni mõiste. Browni liikumise ruutvariatsioon

Vaatleme reaalmuutuja funktsiooni f. Funktsiooni f muutlikkust ehk varieerumist mingil lõigul $[a, b]$ võib ligikaudselt iseloomustada nii, et jaotame lõigu osadeks punktidega $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ ning liites kokku funktsiooni muutude absoluutväärtused $|f(t_i) - f(t_{i-1}|$. Absoluutväärtuste liitmise asemel võime aga liita ka vahede ruutusid, kuupe, neljandaid astmeid jne. Et leitav suurus ei jääks sõltuma punktide valikust, tuleb leida piirväärtus, kui valitud punktide arv läheb lõpmatusse. Selle idee kohaselt jõuame definitsioonini

Definitsioon 14. *Funktsiooni f p-variatsiooniks üle lõigu $[a, b]$ nimetatakse suurust*

$$Var_p(f; a, b) = \limsup_{\|\pi\| \to 0} \sum_{i=1}^{n(\pi)|} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p, \}$$

kus π on lõigu $[a, b]$ jaotus osalõikudeks punktidega $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n(\pi)} = b$ ja $\|\pi\|$ on maksimaalse osalõigu pikkus.

On arusaadav, et kui f on pidev ja tükeldus küllalt tihe, siis üksikliidetavad on seda väiksemad, mida kõrgem on järk p. Seega $p < q$ korral q-variatsioon on väiksem võrreldes p-variatsiooniga.
Samal ajal me kasutasime terminit ruutvariatsioon juba varem martingaalide juures: martingaali M ruutvariatsiooniks nimetasime sellist ennustatavat protsessi A, mille korral vahe $M^2 - A$ on omakorda martingaal. Näiteks standardse Browni liikumise W puhul $W_t^2 - t$ on martingaal, seega t on Browni liikumise ruutvariatsioon. Tekib küsimus, kas selline terminite kokkulangemine on õigustatud.

Jaatava vastuse annab järgnev lemma. Vaatleme lõigu $[0, t]$ tükeldust

$$\pi_n : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t$$

ja olgu

$$\begin{aligned} \Delta_i &= t_i - t_{i-1}, \; i = 1, 2, \ldots, n \\ \Delta W_i &= W_{t_i} - W_{t_{i-1}}, \\ Q_n(t) &= \sum_{i=1}^{n} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 = \sum_{i=1}^{n} (\Delta W_i)^2. \end{aligned}$$

Lemma 8. *Leiab aset järgmine koondumine ruutkeskmise mõttes:*

$$\mathbf{E}[Q_n(t) - t]^2 \to 0, \quad n \to \infty.$$

Tõestus. Browni liikumise juurdekasvud ΔW_i on sõltumatud ning $\Delta W_i \sim N(0, \sqrt{\Delta W_i})$. Seetõttu

$$\mathbf{E} Q_n(t) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}(\Delta W_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i = t.$$

Samal ajal dispersioon

$$D(Q_n(t)) = \sum_{i=1}^{n} D((\Delta W_i)^2) = \sum_{i=1}^{n} [\mathbf{E}(\Delta W_i)^4 - \Delta_i^2].$$

On hästi teada, et $N(0, 1)$ jaotusega juhusliku suuruse W_1 keskväärtus $\mathbf{E} W_1 = 3$. Seega juurdekasvude statsionaarsust arvestades

$$\mathbf{E}(\Delta W_i)^4 = \mathbf{E}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^4 = \mathbf{E} W_{t_i - t_{i-1}}^4 = \mathbf{E}\left[(\Delta_i)^{1/2} W_1\right]^4 = 3\Delta_i^2,$$

millest

$$D(Q_n(t)) = 2 \sum_{i=1}^{n} \Delta_i^2.$$

Seega, kui $\|\pi_n\| = \max \Delta_i \to 0$, siis

$$D(Q_n(t)) \leq 2\|\pi_n\| \cdot \sum_{i=1}^{n} \Delta_i = 2t \; \|\Pi_n\| \to 0.$$

Et

$$D(Q_n(t)) = \mathbf{E}(Q_n(t) - t)^2,$$

siis on lemma tõestatud.$\square$

Saadud lemmat kasutades pole raske näidata, et Browni liikumine on tõkestamata muuduga.

Järeldus. Browni liikumise trajektoorid on p.k. tõkestamata muuduga, st $Var_1(W;0,t) = \infty$.
Tõestus. Ilmselt kehtib järgmine võrratuste rida:

$$\begin{aligned} Q_n(t) &= \sum_{i=1}^{n} (\Delta W_i)^2 \\ &\leq \max_i |\Delta W_i| \cdot \sum_{i=1}^{n} |\Delta W_i| \\ &\leq \max_i |\Delta W_i| \cdot Var_1(W;0,t). \end{aligned}$$

Laseme $\max \Delta_i \to \infty$. Browni liikumise trajektooride ühtlase pidevuse tõttu lõigul $[0,t]$ leiab siis aset koondumine $\max_i |\Delta W_i| \to 0$. Kui oletada vastuväiteliselt, et $Var_1(W;0,t) < \infty$, siis võrratuste ahela viimane avaldis läheneb nullile, samas kui esimene avaldis läheneb ruutkeskmise mõttes suurusele t. Saime vastuolu. $\square$

Tõestatud fakt teeb raskemaks integreerimise Browni liikumise (ja teiste martingaalide) suhtes, kuna üldiselt langeb ära võimalus integreerida üksikuid trajektoore pidi. Nimelt on teada, et tavaline Riemann- Stiltjesi integraal $\int_0^1 f(t)dg(t)$ eksisteerib siis, kui f ja g on tõkestatud muuduga ning nad ei oma samu katkevuspunkte vaadeldaval lõigul.[4] Seepärast on vaja martingaalide suhtes integreerimiseks uut tüüpi integraali (stohhastilist integraali), mida tutvustame esmalt lihtsa (aga olulise) näite varal.

11.2 Stohhastilise integraali näide

Järgnevas püüame anda tähenduse integraalile $\int_0^t W_s dW_s$. Eelnevast on selge, et see integraal ei eksisteeri Riemann- Stiltjesi mõttes, st iga fikseeritud trajetoori korral integraalsumma

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} W_{t_{i-1}} \Delta W_i = \sum_{i=1}^{n} W_{t_{i-1}} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \tag{8}$$

ei koondu n kasvades (tavalise arvujada koondumise mõttes). Arvestades seost $(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 = W_{t_i}^2 + W_{t_{i-1}}^2 - 2W_{t_i}W_{t_{i-1}}$, saab aga selle summa esitada kujul

$$S_n = \frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}Q_n(t).$$

[4] Viimase aja uuringud on siiski näidanud, et Riemann-Stiltjese integraali olemasoluks piisab sellest, kui f omab tõkestatud p-variatsiooni ning g tõkestatud q-variatsiooni, kus $p,q > 0$ rahuldavad nõuet $1/p + 1/q > 1$.

Lemma 8 põhjal leiab aset ruutkeskmine (ehk $\mathcal{L}^2$) koondumine $S_n \to \frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}t$. Saadud piirväärtust $\frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}t =: I_t$ nimetamegi stohhastiliseks integraaliks ja kirjutame

$$\int_0^t W_s dW_s = \frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}t. \tag{9}$$

Näeme, et võrreldes Riemann-Stiltjesi integraaliga on tekkinud lisaliige $-t/2$. Teeme arutelust kokkuvõtte:

- Iga fikseeritud trajektoori $W_t(\omega)$ korral integraalsumma S_n üldiselt ei koondu suuruseks $I_t(\omega) = \frac{1}{2}W_t^2(\omega) - \frac{1}{2}t$ (täpsemalt, S_n ei koondu üldse, sest R-S integraal ei koondu).
- Samas S_n keskmine (üle kõigi ω) kõrvalekalle protsessist $I_t = \frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}t$ on null, $\mathbf{E}(S_n - I_t) = 0$.
- Protsessi I_t ümber toimub S_n juhuslik hälbimine, mis aga vaibub jaotuspunktide arvu n kasvades: iga t korral $\mathbf{E}(S_n - I_t)^2 \to 0$.

Seega stohhastiline integraal I_t on selline juhuslik protsess, mis ei pea tingimata töötama hästi (olema lähedane integraalsummale S_n) iga üksiku trajektoori korral, vaid ta töötab hästi kõigi trajektooride lõikes korraga.

Selgitame veel integraalsumma S_n valiku tagamõtet valemis (8), kus Browni liikumise väärtused $W_{t_{i-1}}$ olid võetud intervallide $[t_{i-1}, t_i]$ alguspunktides. Nimelt, sellise valiku korral $S_n = \sum_{i=1}^n W_{t_{i-1}}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})$ kujutab endast martingaalteisendust ning teoreemi 2 põhjal on S_n ka ise martingaal filtratsiooni $\{\mathcal{F}_t^W\}$ suhtes. Samuti teame, et piirprotsess $\frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}t$ on martingaal (vt. teoreem 6 punkt 2)). Osutub, et kui integraalsummas Browni liikumine väärtustada lõigu keskpunktis , st $S_n = \sum_{i=1}^n W_{y_i}\Delta W_i$, kus $y_i = (t_{i-1} + t_i)/2$, siis ei S_n ega ka sel juhul tekkiv piirprotsess $\frac{1}{2}W_t^2$ pole enam martingaalid (nn. *Stratonovitši integraal*).

Siirdume nüüd stohhastilise integraali üldisema definitsiooni juurde. Seejuures me ei piirdu integreerimisega üksnes Browni liikumise suhtes.

11.3 Lihtsa protsessi stohhastiline integraal

Stohhastilise integraali defineerimiseks kasutame tavapärast kolme-etapilist skeemi: 1) esmalt defineerime stohhastilise integraal "lihtsate" protsesside jaoks (see sarnaneb martingaalteisendusega), 2) üldisema juhusliku protsessi esitame lihtsate protsesside piirväärtusena ning 3) üldisema protsessi stohhastilise integraali defineerime lähendprotsesside integraalide jada piirväärtusena.
Olgu $T = [0, \infty)$ ning olgu antud filtratsioon $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$. Olgu M pidev integreeruva ruuduga martingaal filtratsiooni $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ suhtes.

Definitsioon 15. *Protsessi η nimetatakse* lihtsaks protsessiks*, kui leidub lõplik arv ajamomente $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \infty$ ja lõpliku dispersiooniga juhuslikud suurused $\xi_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$ nii, et ξ_i on $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$-mõõtuv iga i korral ning*

$$\eta_t = \sum_{i=1}^{n} I_{[t_{i-1}, t_i)}(t)\xi_i.$$

Definitsioon 16. *Lihtsa protsessi η stohhastiliseks integraaliks martingaali M suhtes nimetatakse protsessi*

$$\begin{aligned} Int_t = \int_0^t \eta_s\, dM_s : &= \sum_{i=1}^{n_t} \xi_i(M_{t_i} - M_{t_{i-1}}) + \xi_{n_t+1}(M_t - M_{t_{n_t}}) \\ &\equiv \sum_{i=1}^{n} \xi_i(M_{t\wedge t_i} - M_{t\wedge t_{i-1}}), \end{aligned}$$

kus n_t on selline täisarv, et $t_{n_t} \le t < t_{n_{t+1}}$.

Paneme tähele, et lihtsa protsessi stohhastilise integraali valem on sama struktuuuriga nagu martingaalteisendus valemis (3). Täpsemalt, kui vaadelda ainult ajahetki $t = t_i$, siis protsess $Y_i := Int_{t_i}, i = 0, 1, \ldots, n-1$ on martingaalteisendus ja teoreemi 2 põhjal on $\{Y_i\}$ ka ise martingaal.

Kerge on näha, et valides lihtsaks protsessiks $\eta \equiv 1$, saame valemi

$$\int_0^t dM_s = M_t - M_0,$$

mis langeb kokku tavalise integraali vastava omadusega.

11.4 Pideva protsessi stohhastiline integraal

Olgu Z selline pidev ja kohandatud protsess, et

$$\mathbf{E}(\int_0^t Z_s^2\, d\langle M\rangle_s) < \infty\ \forall t > 0.$$

Definitsioon 17. *Protsessi Z stohhastiliseks integraaliks martingaali M suhtes nimetatakse piirväärtust*

$$Int_t = \int_0^t Z_s\, dM_s = \lim_{\|\Pi\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} Z_{t_{i-1}}(M_{t_i} - M_{t_{i-1}}),$$

kus Π on lõigu $[0, t]$ jaotus n osalõiguks:

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t.$$

Teoreem 17. *Stohhastilisel integraalil on järgmised omadused:*

(i) Protsess $(Int_t)_{t\in[0,\infty)}$ *on integreeruva ruuduga martingaal.*

(ii) Protsessi Int *ruutvariatsiooniks on protsess*

$$\langle Int\rangle_t = \int_0^t Z_s^2 \, d\langle M\rangle_s.$$

Tõestus: Neid omadusi on suhteliselt lihtne tõestada lihtsate protsesside korral. Teist omadust tuntakse seejuures isomeetria nime all.

Stohhastilise integraali vahetuks arvutamiseks ülaltoodud definitsioon üldiselt ei sobi (erandiks on lihtsa protsessi integraal). Muide, sama olukord on ka klassikalise Riemanni integraaliga. Seetõttu on välja töötatud tehnika e. reeglid, mis lubavad stohhastilisi integraale ka praktiliselt leida. Kesksel kohal on siin nn Itô valem.

12 Itô valem

Vaatleme juhuslikku protsessi X_t, mis lahutub järgmisteks osadeks

$$X_t = X_0 + V_t + M_t, \tag{10}$$

kus
M_t on pidevate trajektooridega martingaal, mille ruutvariatsioon ei ole null (trajektoorid on "karedad", näiteks Browni liikumine),
V_t on kohandatud protsess, mille trajektoorid on pidevalt diferentseeruvad (ehk "siledad"), trajektooride variatsioonid on lõplikud, ruutvariatsioon on 0.
Selliseid protsesse X_t nimetatakse *semimartingaalideks.* Meid huvitab kuidas avaldub sel juhul funktsiooni juurdekasv $f(X_t) - f(X_0)$.

Klassikalisest analüüsist on teada, et kui X_t on "tavaline" protsess (näiteks pidevalt diferentseeruvate trajektooridega), siis kehtib Newton-Leibnizi valem

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t f'(X_s) dX_s.$$

Üldisema protsessi 10 korral annab vastuse aga Itô valem.

12.1 Itô valem.

Olgu f kaks korda pidevalt diferentseeruv funktsioon. Siis

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t f'(X_s) dV_s + \int_0^t f'(X_s) dM_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s) d\langle M\rangle_s\ . \tag{11}$$

Itô valemi paremal pool asuv teine integraal on stohhastiline integraal, teised kaks aga tavalised (Riemann-Stiltjesi) integraalid. Seega avaneb võimalus avaldada stohhastiline integraal tavaliste integraalide kaudu. Selles peitubki Itô valemi tähtsus.

Näide 1. Olgu W_t standardne Browni liikumine ja $X_t = W_t$ (st lahutuses [10) esineb ainult martingaaliosa ning $X_0 = V_t = 0$. Näitame Itô valemit kasutades, et $\int_0^t W_s dW_s = \frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}t$ (saades niiviisi veel kord valemi (9).)

Itô valemi tõestus. Lihtsuse huvides esitame üksnes Itô valemi tõestuse idee ning sedagi juhul, kui $V_t = 0$ ning martingaaliks M_t on standardne Browni liikumine W_t. Et Browni liikumise ruutvariatsioon on $\langle W\rangle_s = s$, siis oleks meil vaja näidata seos

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t f'(X_s) dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s) ds. \tag{12}$$

Vaatleme lõigu $[0, t]$ tükeldust $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t$. Siis

$$f(X_t) - f(X_0) \equiv \sum_{i=1}^{n} \left[f(X_{t_i}) - f(X_{t_{i-1}}) \right].$$

Rakendame igas osalõigus tavalist Taylori valemit:

$$f(X_t) - f(X_0) = \sum_{i=1}^{n} f'(X_{t_i})(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} f''(X_{\xi_i})(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2,$$

kus $\xi_i \in [t_i, t_{i-1}]$. Saadud avaldise esimene summa koondub tükelduse edasisel peenendamisel (ruutkeskmise mõttes) stohhastiliseks integraaliks $\int_0^t f'(X_s) dW_s$. Teises summas esinev Browni liikumise juurdekasvu ruut $(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2$ on aga lähendatav oma keskväärtusega $\Delta_i = t_i - t_{i-1}$ (vastavad arvutused on tehtud lemma 8 tõestuses, kus selgus, et dispersioon $D((W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2) = 2\Delta_i^2 \to 0$). Seetõttu teine summa tervikuna on lähendatav avaldisega $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} f''(X_{\xi_i}) \Delta_i$, mis koondub tavaliseks integraaliks $\frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) ds$. $\square$

Näide 2. Finantsmatemaatikas on laialt kasutusel aktsiahinna S_t käitumise järgmine mudel:

$$dS_t = S_t \left(\mu dt + \sigma dW_t \right), \tag{13}$$

kus
μ näitab hinna suhtelist muutust ühe ajaühiku kohta (antud mudelis konstantne suurus),
dW_t on hinnamuutuse juhuslik osa, mis käitub väikese ajavahemiku Δt korral nagu Browni liikumise juurdekasv,
σ näitab juhusliku komponendi osatähtsust hinna arengus (volatiilsuse parameeter).
Ülaltoodud seos on tegelikult kokkuleppeline lühem kirjapilt järgmisest võrrandist:

$$S_t - S_0 = \int_0^t S_s \mu ds + \int_0^t S_s \sigma dW_s. \tag{14}$$

Seame ülesandeks lahendada see nn *stohhastiline diferentsiaalvõrrand* (13) S_t suhtes. Osutub, et lihtsaim viis on leida esmalt $ln(S_t/S_0)$.

Itô valemi diferentsiaalkuju

$$df(X_t) = f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''(X_t)d\langle M\rangle_t \ . \qquad (15)$$

Valem (15) tuleneb vahetult Itô valemist (11), olles lihtsalt selle kokkuleppeline lühem (ja mugavam) kirjaviis. Avaldis $d\langle M\rangle_t$ on siin funktsiooni $\langle M\rangle_t$ tavaline diferentsiaal, dX_t aga on sümbol (nn *stohhastiline diferentsiaal*), mille täpne tähendus on antud ainult stohhastilise integraali $\int_0^t f'(X_s)dX_s$ mõiste kaudu.

Näide 3. Lahendada näites 2 toodud ülesanne, kasutades Itô valemi diferentsiaalkuju.

12.2 Itô valemi üldistus

Sõltugu funktsioon f veel ka ajast, $f = f(X_t, t)$, kus protsess X_t on endiselt kujul (10). Eeldades, et funktsioon $f(x,t)$ on piisavalt sile (piisav arv kordi diferentseeruv), kehtib järgmine valem:

$$df(X_t,t) = \frac{\partial f}{\partial t}(X_t,t)\ dt + \frac{\partial f}{\partial x}(X_t,t)\ dX_t + \frac{1}{2}\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_t,t)\ d\langle M\rangle_t\ . \tag{16}$$

Näide 4. Oletame, et aktsia hind S_t käitub järgmise mudeli kohaselt:

$$dS_t = S_t\,(rdt + \sigma dW_t),$$

kus r on riskivaba intressimäär ja σ on hinna volatiilsus. Näidata, et siis diskonteeritud hinnaprotsess $e^{-rt}S_t$ on martingaal.

Näide 5. Leida $d\left(e^{-rt}V(S_t,t)\right)$, kus $V(s,t)$ on teadaolev kaks korda pidevalt diferentseeruv funktsioon ja hinnaprotsessi S_t juhib võrrand $dS_t = S_t\left(rdt + \sigma dW_t\right)$.

Siin võtame $f(s,t) = e^{-rt}V(s,t)$.

Tulemuseks saame stohhastilise diferentsiaalvõrrandi

$$d\left(e^{-rt}V(S_t,t)\right) = e^{-rt}\left[-rV(S_t,t) + \frac{\partial V}{\partial t} + rS_t\frac{\partial V}{\partial s} + \frac{1}{2}S^2\sigma^2\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}\right]dt + \sigma S_t\frac{\partial V}{\partial s}dW_t$$

Järeldus: Kui funktsioon $V = V(s,t)$ rahuldab seost

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rs\frac{\partial V}{\partial s} + \frac{1}{2}s^2\sigma^2\frac{\partial^2 V}{\partial s^2} - rV = 0, \quad \forall s,t \tag{17}$$

siis dt kordaja muutub nulliks ning tulemuseks on martingaal

$$d\left(e^{-rt}V(S_t,t)\right) = \sigma S_t\frac{\partial V}{\partial s}\ dW_t.$$

Toodud järeldus on esimene seos juhuslike protsesside ja diferentsiaalvõrrandite vahel. Valemit (17) nimetatakse Black-Scholes'i võrrandiks.

Asjaolu, et $e^{-rt}V(S_t,t)$ on teatud juhul martingaal, saab ära kasutada finantsmatemaatika mitmete probleemide lahendamisel. Nimelt on martingaali tulevikukeskväärtus alati võrdne oma alghetke keskväärtusega. Vaatleme üht sellekohast näidet.

Näide 6. Optsioonide hindamine

12.3 Itô valem mitmemuutuja funktsioonide jaoks

Vaatleme mitmemuutuja funktsioone kujul $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$, näiteks $\sum_{i=1}^n x_i + t$. Eesmärgiks on leida stohhastiline diferentsiaal $d\,f(X_{1t}, X_{2t}, \ldots, X_{nt}, t)$. Selleks tutvume esmalt ristvariatsiooni mõistega.

Definitsioon 18. *Martingaalide M ja N* ristvariatsiooniks *nimetatakse protsessi*

$$\langle M, N\rangle_t = \frac{1}{4}\left(\langle M+N\rangle_t - \langle M-N\rangle_t\right).$$

Ristvariatsioni tähtsamad omadused on:

1. $\langle M, M\rangle_t = \langle M\rangle_t$. (Piisab, kui definitsioonis võtta $M = N$)
2. Kui $Int_{1t} = \int_0^t \xi_s \, dM_s$ ja $Int_{2t} = \int_0^t \eta_s \, dN_s$, siis
$$\langle Int_1, Int_2\rangle_t = \int_0^t \xi_s \eta_s \, d\langle M, N\rangle_s.$$
3. Sõltumatute Browni liikumiste korral $\langle W_1, W_2\rangle_t = 0$.

Itô valem mitmemuutuja funktsioonide jaoks

Kui f on kaks korda pidevalt diferentseeruv, siis kehtib valem

$$\begin{aligned} d\,f(X_{1t}, X_{2t}, \ldots, X_{nt}, t) &= \frac{\partial f}{\partial t}(\overrightarrow{X}_t, t)\,dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overrightarrow{X}_t, t)\; dX_{it} + \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\overrightarrow{X}_t, t)\; d\langle M_i, M_j\rangle_t \end{aligned}$$

kus X_{it} on kujul $X_{it} = X_{i0t} + V_{it} + M_{it}$,
V on "heade omadustega" osa (lõpliku variatsiooniga) ja M on martingaal.

Näide 7.

13 Mõõdu vahetus. Girsanovi teoreem

13.1 Optsioonid

Optsioon on väärtpaber, mille omanikul on õigus osta (või müüa) teatavat vara (näiteks aktsiat) kokkulepitud ajaperioodil kokkulepitud hinnaga K. Vastavalt räägitakse kas ostu- või müügioptsioonist. Kui optsiooni omanik saab oma õigust realiseerida ainult ajaperioodi lõpphetkel T, siis on tegemist Euroopa tüüpi optsiooniga. Ameerika tüüpi optsiooni puhul on võimalik oma õigust kasutada kogu ajaperioodi vältel.

Ostuoptsiooni aluseks oleva aktsia hind S_t võib ajahetkeks T tõusta palju kõrgemale kokkulepitud hinnast K. Sel juhul optsiooni omanik realiseerib ajahetkel T oma ostuõiguse, müüb hinnaga K ostetud aktsiad turul kõrgema hinnaga edasi ning teenib seeläbi kasumit $S_T - K$. Samal ajal optsiooni väljakirjutaja võib kanda sama suurt kahju (juhul, kui ta vahepeal midagi ette ei võta).

Kuna mainitud ostuoptsioon võib selle omanikule tuua tulevikus üksnes tulu, täpsemalt hetkel T on optsiooni väärtuseks $C(S_T) := \max(S_T - K, 0)$, siis on loomulik, et optsiooni eest tuleb selle soetamisel välja käia teatud summa. Optsioonidega seoses tekib 2 probleemi:

- Milline on optsiooni õiglane *hind* (nii selle ostmishetkel kui ka hiljem, sest sageli on vaja optsioon edasi müüa)?
- Kuidas optsiooni väljakirjutaja saab vältida võimalikku kahju, mis on tingitud alusvara hinna ebasoodsast muutusest?

Optsiooni hindamise aluseks on majanduslikest kaalutlustest lähtuv nn. pariteetsusprintsiip, mis seisneb selles, et optsiooni õiglane hind on selline rahakogus X_0, millega hetkel 0 turule minnes ja seal aktsiaga A sobivalt kaubeldes, jõutakse ajahetkeks T täpselt sama rahalise seisuni X_T, kuhu jõutakse ka vaadeldava optsiooni endaga, s.o. seisuni $X_T = C(S_T) = \max(S_T - K, 0)$. On kerge näidata, et suurusest X_0 erineva optsioonihinna korral tekib arbitraaži võimalus, kus üks osapooltest (kas optsiooni omanik või selle väljakirjutaja) saab teenida riskivaba kasumit.
Järgnevas oletame, et aktsia A hind S_t käitub järgmise mudeli kohaselt

$$d\,S_t = S_t\,(\mu dt + \sigma\,dW_t), \tag{18}$$

kus μ on aktsia tulususe (ehk suhtelise hinnamuutuse) konstantne komponent ehk *triiv*, σ on aga juhusliku komponendi osakaalu kirjeldav konstant, mida nimetatakse aktsiahinna *volatiilsuseks*.

Vaatleme nüüd investorit, kes paigutab hetkel 0 tema käsutuses oleva raha koguse X_0 osaliselt aktsiasse A ning ülejäänud raha pangaarvele riskivaba intressimääraga r. Seejärel hakkab ta teatud strateegiaga aktsiat A ostma ja müüma, kusjuures müügist teenitud raha paneb ta pangaarvele ja ostuks vajaliku raha võtab samalt arvelt (isefinantseeriv portfell). Olgu $\eta(t)$ ajahetkel t investori poolt omatavate aktsiate kogus. Vaadeldava portfelli väärtus X_t (ehk investori rikkus) hetkel t koosneb siis kahest komponendist: aktsiate koguväärtusest $\eta(t) \cdot S_t$ ja pangas olevast rahast, mida on $X_t - \eta(t)\, S_t$. Avaldame sellise portfelli väärtuse muudu lühikese ajaintervalli dt jooksul:

$$dX_t = r\,[X_t - \eta(t)\, S_t]\, dt + \eta(t) \cdot dS_t.$$

Itô valemit ja turumudelit (18) kasutades saab siis avaldada ka diskonteeritud rikkuse muudu:

$$d(e^{-rt}X_t) = \eta(t) d(e^{-rt}S_t)$$

(teha läbi!). Siit on näha, et niipea, kui diskonteeritud hinnaprotsess $e^{-rt}S_t$ on martingaal, on seda ka diskonteeritud rikkus $e^{-rt}X_t$. Martingaali üks põhiomadusi on aga tema keskväärtuse säilumine ajas. Seega teadaolev (mittejuhuslik) algväärtus võrdub keskväärtusega suvalisel hilisemal ajahetkel, sealhulgas hetkel T:

$$X_0 = e^{-r0}X_0 = \mathbf{E}(e^{-rT}X_T) = \mathbf{E}(e^{-rT}C(S_T)) \tag{19}$$

Jääb üle küsimus, kas diskonteeritud hinnaprotsess $e^{-rt}S_t$ on martingaal? Selle üle otsustamiseks leiame Itô valemi abil tema stohhastilise diferentsiaali:

$$d\left(e^{-rt}S_t\right) = e^{-rt}S_t\,\sigma\left(\frac{\mu - r}{\sigma}dt + dW_t\right).$$

Tulemus oleks kindlasti martingaal, kui $\mu = r$, sest siis jääks alles üksnes stohhastiline integraal W_t suhtes, mis on teatavasti martingaal. Kuid osutub, et ka kogu sulgavaldisele vastavat protsessi $\widetilde{W}_t = \frac{\mu - r}{\sigma}\,t + W_t$ saab vaadelda martingaalina. Selleks tuleb lihtsalt esialgse Browni liikumise W_t trajektooride tõenäosusi sobivalt muuta ehk ümber kaaluda. Teisiti öeldes, tuleb teisendada mõõtu $\mathbf{P}$ nii, et uue mõõdu $\mathbf{Q}$ suhtes $\widetilde{W}_t$ on juba martingaal. Selle võimaluse tagab Girsanovi teoreem (ehk Cameron-Martini teoreem), mis näitab ära ka konkreetse seose uue ja vana mõõdu vahel.

Teoreem 18. (Girsanovi teoreem)
Olgu W_t standardne Browni liikumine tõenäosusruumi $(\Omega, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbf{P})$ suhtes. Olgu $\widetilde{W}_t = \int_0^t \theta_s\, ds + W_t$, kus protsess θ on kohandatud filtratsioonile $\{\mathcal{F}_t\}$ ja rahuldab nõuet $\mathbf{E}\left(e^{\frac{1}{2}\int_0^T \theta_s^2 ds}\right) < \infty$.

Siis leidub tõenäosusmõõt $\mathbf{Q}$, mille suhtes $\widetilde{W}_t$ on standardne Browni liikumine. Seejuures mõõt $\mathbf{Q}$ avaldub $\mathbf{P}$ kaudu seosega $\mathbf{Q}(A) = \int_A M_T(\omega)\mathbf{P}(d\omega)$, kus

$$M_t = \exp\left(-\int_0^t \theta_s\, dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds\right).$$

Mõõtu $\mathbf{Q}$ nimetatakse *riskineutraalseks* ehk martingaalmõõduks. Rakendame Girsanovi teoreemi meie juhul, kus $\theta_t \equiv \frac{\mu-r}{\sigma}$. Teoreemi eeldus $\mathbf{E}\left(e^{\frac{1}{2}\int_0^T \theta_s^2 ds}\right) < \infty$ on ilmselt täidetud. Seega on martingaalmõõdu $\mathbf{Q}$ olemasolu tagatud ja optsiooni hind on keskväärtus selle uue mõõdu $\mathbf{Q}$ suhtes:

$$X_0 = e^{-r0}X_0 = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(e^{-rT}C(S_T)). \tag{20}$$

Selgitame nüüd veel termini " riskineutraalne mõõt" tagamõtet. Selleks asendame turumudelis (18)

$$dW_t = d\widetilde{W}_t - \frac{\mu - r}{\sigma}dt,$$

mis pärast lihtsaid teisendusi annab

$$d\,S_t = S_t\,(rdt + \sigma\,d\widetilde{W}_t). \tag{21}$$

See valem erineb turumudelist (18) üksnes selle poolest, et μ asemel seisab riskivaba intressimäär r. Järelikult, mõõdu $\mathbf{Q}$ korral aktsia hinna suhteline juurdekasv on keskmiselt võrdne riskivaba intressimääraga r. Siit tulebki termin "riskineutraalne mõõt".

Lõpuks paar märkust selle kohta, kuidas tegelikult arvutada optsiooni hinda kui keskväärtust $X_0 = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(e^{-rT}C(S_T))$. Selleks on kaks peamist võimalust:

1. **Simuleerimine**, kus genereeritakse suur hulk hinnatrajektoore vastavalt turumudelile (21). Iga trajektoori lõpus leitakse $C(S_T)$, leitakse saadud tulemuste aritmeetiline keskmine ja korrutatakse läbi diskonteerimisteguriga e^{-rT}.

2. Keskväärtuse **analüütiline** arvutamine. See on võimalik üksnes lihtsate maksefunktsioonide $C(S_t)$ korral, nagu näiteks Euroopa tüüpi optsioonid. Viimasel juhul on tulemuseks praktikas väga sageli kasutatav nn. *Black-Scholesi hinnavalem.*

Martingaalide kodused ülesanded

1. Tõestada tingliku keskväärtuse omadused (b), (c), (i) (torni omadus).

2. Olgu $\{Y_n\}$ martingaal $\{\mathcal{F}_n\}$ suhtes. Näidata, et $\mathbf{E}Y_n = \mathbf{E}Y_0, \forall n$.

3. Näidata, et keskväärtusega 1 sõltumatute juhuslike suuruste korrutis on martingaal (loengunäite lõpetamine).

4. Olgu S_n lihtne sümmeetriline juhuslik ekslemine. Näidata, et S_n ja $S_n^2 - n$ on martingaalid.

5. Olgu S ja T peatumishetked filtratsiooni $\{\mathcal{F}_n\}$ suhtes. Näidata, et siis ka $S + T$, $\max\{S, T\}$ ja $\min\{S, T\}$ on peatumishetked.

6. Olgu $\{X_n\}$ lihtne sümmeetriline juhuslik ekslemine, kus $X_n = +1$ korral mängija võidab ja $X_n = -1$ korral kaotab oma panuse n-ndas mängus. Mängija kasutab strateegiat, mille kohaselt iga kaotuse järel ta kahekordistab oma panuse, esimese võidu järel aga lahkub kohe mängust (sellist strateegiat nim. *martingaaliks*). Näidata, et lõpliku algsummaga mängija laostub positiivse tõenäosusega, lõpmatu algsummaga mängija aga võidab 1 ühiku.

   Olgu Y_n mängija koguvõit n mängus ($Y_0 = 0$) ja $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. Näita, et $\{Y_n\}$ on $\{\mathcal{F}_n\}$-martingaal ja leida $\mathbf{E}Y_n$.

   (Juhis: Lähtu *lõputu* duubeldamisega strateegiast, kus mängija jätkab ka pärast võitu. Näita, et siis koguvõidu protsess $\{\hat{Y}_n\}$ on $\{\mathcal{F}_n\}$-martingaal ning et $\{Y_n\}$ on $\{\hat{Y}_n\}$ suhtes peatatud martingaal.)

7. Tõestada Järeldus 1:
   Olgu M selline martingaal, et mingi $K_1 > 0$ korral $|M_n - M_{n-1}| \leq K_1 \ \forall n \geq 1$. Olgu C selline ennustatav protsess, et $|C_n| \leq K_2$ mingi $K_2 > 0$ korral. Kui T on selline peatumishetk, et $\mathbf{E}T < \infty$, siis $\mathbf{E}(C \bullet M)_T = 0$.

8. Jaan asub a krooniga kasiinos mündivisete peale mängima. Jaani panus on alati 1 kroon ning ta võidab "kulli" tuleku korral ning kaotab "kirja" korral. Mäng lõpeb siis, kui Jaanil on raha otsas või kui tal on b krooni (b on etteantud arv, $b > a$). Eeldame, et "kulli" tõenaosus on $p = \frac{1}{2}$. Leida Jaani laostumise tõenäosus.

   (Juhis: Olgu S_n nullist algav sümmeetriline juhuslik ekslemine, T mängust väljumise hetk ja P_a otsitav tõenäosus.. Veendu, et saab kasutada Doobi peatumisteoreemi $ES_T = ES_0 = 0$. Avalda ES_T suuruste a, b ja P_a kaudu ning leia P_a.)

9. Lahendada eelmine ülesanne juhul, kui $p \neq \frac{1}{2}$.

   (<u>Juhis.</u> Olgu S_n vastav (mittesümmeetriline) lihtne juhuslik ekslemine. Veendu, et protsess $\left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}$ on martingaal ja kasuta Doobi peatumisteoreemi.)

10. Olgu S_n nullist algav sümmeetriline juhuslik ekslemine ja olgu $X_n = S_n + 1$. (Seega X_n on lihtne juhuslik ekslemine, mis lähtub punktist 1 hetkel 0.)
    Olgu $T = \inf\{n : X_n = 0\}$. Näita, et T on peatumishetk ning et peatatud protsess $Y_n := X_{T \wedge n}$ on mittenegatiivne martingaal, mistõttu ta koondub p.k. lõplikuks piirväärtuseks Y_∞, kui $n \to \infty$.
    Näita, et $\mathbf{E}Y_n = 1\ \forall n$, kuid $\mathbf{E}Y_\infty = 0$. Miks see pole vastuolus Doobi peatumisteoreemiga?

11. Olgu X kohandatud protsess ruumis L^1 ja olgu protsess A defineeritud seosega $A_0 = 0, \quad A_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}(X_i - X_{i-1}|\mathcal{F}_{i-1}),\ n \geq 1$. Näidata, et siis protsess $M_n = X_n - X_0 - A_n$ on 0-st algav martingaal.

12. (Polya urn) Olgu kotis r punast ja b sinist kuuli $(r, b > 0.)$. Kotist võetakse juhuslik kuul, margitakse üles selle värv ja pannakse kotti tagasi koos teise sama värvi kuuliga. Olgu R_n punaste kuulide arv kotis pärast n-ndat sellist operatsiooni. Näidata, et protsess $Y_n = \frac{R_n}{n+r+b}$ on martingaal.

13. Olgu eelmises ülesandes kuulide lähtearvud $r = b = 1$. Tõesta, et siis $P(R_n = k) = \frac{1}{n+1},\ k = 1, \ldots, n+1$. Näita, et eksisteerib piirväärtus $\theta := \lim_{n\to\infty} Y_n$ ning et θ on lõigul $[0, 1]$ ühtlase jaotusega. (Juhis: kasuta asjaolu, et p.k. koondumisest järeldub jaotuse järgi koondumine.)

14. Näita, et ühtlaselt integreeruv juhuslike suuruste pere $\mathcal{C}$ on tõkestatud ruumis $\mathcal{L}^1$, s.t. $\sup_{X \in \mathcal{C}} \mathbf{E}|X| < \infty$.
    (Juhis: võta $\epsilon = 1$.)

15. Olgu juhuslik suurus $Z \sim N(0, 1)$. Milline on juhusliku suuruse $\sqrt{t}Z$ jaotus? Kas protsess $X_t = \sqrt{t}Z$ on Browni liikumine? (Kontrolli ükshaaval Br.l. definitsiooni nõuete täidetust.)

16. Olgu $\{W_t, t \geq 0\}$ (standardne) Browni liikumine.
    a) Leida tõenäosus $P\{W_3 - W_2 > 1\}$?
    b) Leida korrutise $W_3(W_6 - W_5)$ keskväärtus.
    Oletame edaspidises, et W_t on ajahetkeks 3 jõudnud täpselt Sinu matrikli viimase numbrini (st nivoole $k,\ 0 \leq k \leq 9$).
    c) Kui suur on siis (tinglik) tõenäosus, et ajahetkel $4 + k/2$ on Browni liikumine negatiivne, kuid mitte alla -3?
    d) Leida tinglik keskväärtus $\mathbf{E}(W_2|W_3 = k)$.

17. Tõesta Lemma 6 väited 1) ja 3).
Juhis: Väite 3) puhul näidake esmalt, et kui Z on standardse normaaljaotusega juhuslik suurus, siis

$$\mathbf{E}(e^{\lambda Z}) = e^{\lambda^2/2}, \ \lambda \in \mathcal{R}.$$

18. Olgu W_t standardne Browni liikumine mõõdu $\mathbf{P}$ suhtes. Olgu T_a nivoo a saavutamise aeg, $T_a = \inf\{t \geq 0 : W_t = a\}$. Kasutades Lemmat 7, leia $\mathbf{E}T_a$.

19. Simuleerida (nt Exceli abil) stohhastilist integraali $\int_0^t W_s dW_s, \ t \in [0, k+1]$ (k on Teie õpinguraamatu viimane number). Selleks

   (a) jagada lõik $[0, k+1]$ 10000 võrdse pikkusega osaks,

   (b) iga osalõigu jaoks genereerida Browni liikumise juurdekasv $W_{t_i} - W_{t_{i-1}}$ (normaaljaotusega juhuslik suurus, sobivalt võetud standardhälbega)

   (c) jooksva summeerimise teel leida trajektoor $W_t = \sum(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})$,

   (d) leida integraalsumma $S_n = \sum W_{t_{i-1}}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})$ trajektoor,

   (e) leida stohhastilise integraali täpse väärtuse $0,5\,(W_t^2 - t)$ trajektoor ning lähendi ja täpse väärtuse erinevus (d)-(e).

   (f) leida ruutvariatsiooni lähendsumma $Q_n(t) = \sum(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2$ graafik ning võrrelda seda Browni liikumise teoreetilise ruutvariatsiooniga t. Milline on suurim erinevus?

   Esitada (maili teel) Exceli tööleht koos punktides (c)-(f) nimetatud graafikutega. Lisage kommentaarid võrdluste kohta.
   Eksperimenteerige iseseisvalt, genereerides uusi juurdekasve punktis (b).

20. Olgu W_t standardne Browni liikumine. Näidata, et stohhastiline diferentsiaalvõrrand protsessi $Y_t = \exp(\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t)$ jaoks on $dY_t = Y_t \sigma dW_t$.

   Juhis: Kasutada Itô valemi diferentsiaalkuju (15) või selle üldistust (16).

21. Olgu W_t standardne Browni liikumine. Kas juhuslik protsess

$$Y_t = \exp\left(\int_0^t s\,dW_s\right)$$

   on martingaal? Põhjendada vastust!

   Juhis: Leida dY_t, kasutades Itô valemi diferentsiaalkuju (15). Kui dY_t avaldisse jääb ainult liige $f'(X_t)dM_t$, siis Y_t on martingaal (sest stohhastiline integraal martingaali suhtes on alati martingaal).

22. Olgu W_t standardne Browni liikumine. Kas protsess $Y_t = e^{W_t^2 - 3t}$ on martingaal?
Juhis: Toimi nagu eelmises ülesandes, arvestades ka fakti, et $W_t^2 - t$ on martingaal, kusjuures $W_t^2 - t = 2\int_0^t W_s\, dW_s$.

Näidisülesandeid eksamiks:

1. Näidata, et ennustatav martingaal on konstantne protsess, st $M_n = M_0$, $\forall n$.

2. Olgu $X_1, X_2, \ldots$ mittenegatiivsete juhuslike suuruste jada ja olgu $N(t) = \max\{n : X_1 + X_2 + \ldots + X_n \le t\}$. Kas $N(t)$ on peatumishetk loomuliku filtratsiooni $\{\mathcal{F}_n\}$ suhtes? (Põhjenda vastust!). Näidata, et $N(t) + 1$ on peatumishetk.

3. Olgu W_t standardne Browni liikumine.

   (a) Leida tõenäosus, et $W_8 - W_4 > 3$.

   (b) Olgu teada, et $W_2 = 3$. Leida (tinglik) tõenäosus, et $W_8 - W_4 > 3$, ning juhusliku suuruse W_{12} (tinglik) keskväärtus.

4. Olgu W_t standardne Browni liikumine. Defineerime $X_t = t^2 - W_t^2$. Leida ruutvariatsioon $\langle X \rangle_t$.

5. Olgu W_t standardne Browni liikumine. Näidata, et protsess $W_t^3 - 3tW_t$ on martingaal.

6. Olgu W_t standardne Browni liikumine. Kas protsess $Y_t = \exp\left(W_t - \int_0^t s\, dW_s\right)$ on martingaal? (Põhjendada vastust!)

Martingaalide eksam 29.05.2006

1. Olgu S, T peatumishetked filtratsiooni $\mathcal{F}$ suhtes. Näidata, et siis ka $U = \max(S, T)$ on peatumishetk.

2. Olgu $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ martingaal filtratsiooni $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$ suhtes, kusjuures kehtigu $\mathbf{E}(Y_n^2) < \infty\ \forall n$. Näidata, et suvaliste $i \leq j \leq k$ korral
$$\mathbf{E}((Y_k - Y_j)Y_i) = 0$$
ning
$$\mathbf{E}[(Y_k - Y_j)^2|\mathcal{F}_i] = \mathbf{E}(Y_k^2|\mathcal{F}_i) - \mathbf{E}(Y_j^2|\mathcal{F}_i).$$

3. Olgu S_n nullist algav sümmeetriline juhuslik ekslemine ja olgu $X_n = S_n + 1$. Olgu $T = \inf\{n : X_n = 0\}$.
   (a) Näita, et T on peatumishetk ning et peatatud protsess $Y_n := X_{T\wedge n}$ on mittenegatiivne martingaal, mistõttu ta koondub p.k. lõplikuks piirväärtuseks Y_∞, kui $n \to \infty$.
   (b) Näita, et $\mathbf{E}Y_n = 1\ \forall n$, kuid $\mathbf{E}Y_\infty = 0$. Miks see pole vastuolus Doobi peatumisteoreemiga?

4. Olgu W_t standardne Browni liikumine. Tõestada, et protsess $Y_t = e^{2W_t - 2t}$ on martingaal?

5. Olgu W_t standardne Browni liikumine. Kas protsess $Y_t = \exp\left(\int_0^t \ln s\, dW_s\right)$ on martingaal? Põhjendada vastust!

Martingaalide eksam 14.06.2006

1. Olgu S, T peatumishetked filtratsiooni $\mathcal{F}$ suhtes. Näidata, et siis ka $U = S + T$ on peatumishetk.

2. Olgu $X_1, X_2, \ldots$ sõltumatute sama jaotusega juhuslike suuruste jada, kusjuures $P(X_1 = +1) = p$, $P(X_1 = -1) = 1 - p =: q$. Defineerime $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Näidata, et $(q/p)^{S_n}$ on martingaal.

3. Olgu S_n nullist algav sümmeetriline lihtne juhuslik ekslemine ja olgu $X_n = S_n + 1$. Olgu $T = \inf\{n : X_n = 0\}$.

   (a) Näita, et T on peatumishetk ning et peatatud protsess $Y_n := X_{T \wedge n}$ on mittenegatiivne martingaal, mistõttu ta koondub p.k. lõplikuks piirväärtuseks Y_∞, kui $n \to \infty$.

   (b) Näita, et $\mathbf{E}Y_n = 1\ \forall n$, kuid $\mathbf{E}Y_\infty = 0$. Miks see pole vastuolus Doobi peatumisteoreemiga?

4. Olgu W_t standardne Browni liikumine. Kas protsess $W_t^4 - 6tW_t^2 + 3t^2$ on martingaal?

5. Käitugu aktsia hind S_t järgmise mudeli kohaselt:

$$dS_t = S_t\,(\mu dt + \sigma dW_t),$$

   kus μ ja σ on konstandid ja W_t on standardne Browni liikumine. Lahendada see stohhastiline diferentsiaalvõrrand S_t suhtes. (Juhis: leida esmalt $ln(S_t/S_0)$.

Martingaalide eksam 22.06.2006

1. Olgu $X_1, X_2, \ldots$ mittenegatiivsete juhuslike suuruste jada ja olgu $N(t) = \max\{n : X_1 + X_2 + \ldots + X_n \leq t\}$. Kas $N(t)$ on peatumishetk loomuliku filtratsiooni $\{\mathcal{F}_n\}$ suhtes? (Põhjenda vastust!). Näidata, et $N(t) + 1$ on peatumishetk.

2. Olgu S_n nullist algav sümmeetriline juhuslik ekslemine. Näidata, et $S_n^2 - n$ on martingaal.

3. Olgu S_n punktist a, $a \in \mathbb{N}$, algav sümmeetriline lihtne juhuslik ekslemine. Olgu antud ülemine nivoo b, $b > a$, $b \in \mathbb{N}$ ja olgu $T = \inf(n : X_n \in \{0, b\})$. Leida tõenäosus $P(S_T = b)$.
   Juhis: Veenduda, et saab kasutada Doobi peatumisteoreemi $\mathbf{E}S_T = \mathbf{E}S_0$. Avaldada $\mathbf{E}S_T$ suuruse b ja otsitava tõenäosuse kaudu.

4. Olgu W_t standardne Browni liikumine. Kas protsess $Y_t = \exp(W_t - 4t)$ on martingaal? (Põhjendada vastust!)

5. Oletame, et aktsia hind S_t käitub järgmise mudeli kohaselt:

   $$dS_t = S_t\,(r dt + \sigma dW_t),$$

   kus r on riskivaba intressimäär ja σ on hinna volatiilsus. Näidata, et siis diskonteeritud hinnaprotsess $e^{-rt}S_t$ on martingaal.